

Разработка инструментального средства моделирования для исследования простейших моделей вязкоупругих тел

О. В. Мингалева

Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: masterolya10@gmail.com

Р. В. Насыров

Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: docentapris@gmail.com

Аннотация¹

Общая проблема заключается в изучении механических свойств поведения объектов, обладающих сложной структурой и включающих в себя элементы с различными характеристиками. В связи с развитием персональной медицины в круг объектов изучения попадают биомеханические свойства тела человека, как основы оценки функционального состояния опорно-двигательного аппарата.

Наиболее удобными для моделирования объектов со смешанными свойствами являются модели вязкоупругих тел. Для исследования требуется разработка программных средств в рамках определенной системы моделирования. Один из подходов к решению этой задачи представлен в данной работе.

Ключевые слова: персонализированная медицина; рентген; вязкоупругое тело; математическое моделирование.

1. Введение

Тенденции развития современного общества таковы, что проблемы выживания и сохранения здоровья человека как ведущей производительной силы должны существенно дополниться задачами кардинального улучшения качества жизни человека, поиска рецептов активного долголетия, повышения индивидуального уровня качества жизни. Наряду с развитием личной квалификации необходимо увеличить уровень самопознания. В этих условиях задача адекватного математического моделирования процессов, происходящих в живом организме, представляется одной из самых актуальных для современной медицины и науки в целом [1].

2. Актуальность

В современной медицине происходит изменение парадигмы в лечении больных. В новой парадигме

объединены информационные технологии, наука и клиническая терапия для улучшения здоровья и удовлетворения потребностей пациентов [2].

Конкретным воплощением этой парадигмы является персонализированная (или целенаправленная) медицина (ПМ). Это определенная модель организации медицинской помощи людям, основанная на выборе диагностических, лечебных и профилактических средств, которые были бы оптимальными для пациента, с учетом его генетических, физиологических, биохимических и других особенностей [3].

Главная цель ПМ – оптимизировать и персонализировать профилактику, диагностику и лечение, избежать нежелательных побочных эффектов через выявление индивидуальных особенностей организма. В связи с этим наиболее перспективным способом решения этой проблемы являются скрининговые обследования пациентов.

Скрининговые обследования состояния здоровья пациентов проводятся в целях ранней диагностики доклинических проявлений физического и психологического неблагополучия больных, анализа условий труда в контексте их влияния на здоровье, разработки упредительных и компенсирующих мероприятий по минимизации негативного воздействия вредных факторов окружающей среды [2].

2. Состояние вопроса

Рентгенография – один из методов лучевой диагностики, с помощью которого удается получить проекционные изображения внутренних органов. Рентгенография – это самый простой и сравнительно недорогой метод аппаратного исследования, дающий ценную информацию врачу о состоянии здоровья пациента. Вместе с тем, метод имеет и ряд недостатков. В первую очередь недостатки рентгенологического исследования связывают с

Труды Седьмой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-30 мая, Уфа-Ставрополь, Ханты-Мансийск, Россия, 2019

облучением пациента. И хотя доза облучения невысокая, тем не менее, при необходимости проведения повторных рентгенологических исследований облучение может быть значительным. Кроме того, из-за снижения контрастности при рентгенографии снимки не всегда получаются четкими и детальными, что требует от врача предельной внимательности при их анализе [4].

На сегодняшний день существуют разработки, предназначенные для замены рентгенологических исследований при скрининговых обследованиях и экспресс-диагностике. Одной из таких разработок является фемтосекундный лазер, созданный в Томском университете. Это изобретение представляет собой сканер, работающий с видимым светом. Видимый свет проникает в ткани, но слишком сильно поглощается и рассеивается. Решить эту проблему помогает технология, разработанная ранее для астрономии. Коротко говоря, она позволяет восстановить рассеянный свет [5]. Данная технология уникальна и на её основе возможно появление альтернативы рентгеновским аппаратам.

3. Предлагаемые решения

Объектом исследований в современном математическом моделировании являются практически все основные органы и системы человеческого организма. Математические модели целого ряда органов и частей тела – кожи, костей, мускулов, головы – основываются на механических моделях, хорошо известных из механики деформируемого твердого тела [1].

Деформация и текучесть сплошных сред является областью исследований реологии [6]. В реологии существует несколько подразделов. В частности биореология исследует течение разнообразных биологических жидкостей, деформации различных тканей (мышц, костей, кровеносных сосудов) у человека и животных. Для описания реологического поведения материалов пользуются механическими моделями, для которых составляют дифференциальные уравнения, куда входят различные комбинации упругих и вязких характеристик [7].

Всякое тело, твердое или жидкое, можно рассматривать как обладающее свойствами упругости и вязкости. Если рассмотреть сплошную среду, обладающую свойствами вязкой жидкости и упругости, то получим модели вязкоупругости, наиболее простые из них были предложены Максвеллом, Фойгтом и Кельвином в связи с изучением свойств густых растворов, суспензий и упругих тел [8]. В дальнейшем оказалось, что модели вязкоупругости пригодны при разработке технологии разнообразных производственных процессов, при проектных работах и конструкторских расчётах, относящихся к самым различным материалам: металлам, композиционным материалам,

полимерным системам, нефтепродуктам, глинам и другим грунтам, горным породам, строительным материалам, пищевым продуктам [8].

В данной работе реологические модели будут применены для описания костной ткани человека. Такой подход в описании пассивных механических свойств биологических тканей заключается в замене реальной среды реологической моделью, которая отражает какое-нибудь определенное её свойство или совокупность свойств. Несмотря на различие в свойствах органов и тканей человека, все они обладают вязкоупругими свойствами в разных пропорциях [10].

В теле человека существуют различные типы костей, но для всех них характерны общие черты. Поэтому, с определенным уровнем приближения, будем изучать кость как вязкоупругое твердое тело.

В общем виде реологическое уравнение реальных сплошных сред можно описать в рамках линейной реологии следующим дифференциальным уравнением:

$$F(\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}, E, \eta) = 0, \quad (1)$$

где точки над символами означают дифференцирование соответствующих величин по времени, η – вязкость. Решение данного уравнения возможно только при определенных упрощающих его допущениях в рамках определенных идеальных моделей (схем замещения) [9].

Предлагаемый способ описания модели костной ткани, как основы опорно-двигательного аппарата человека, восходит к пионерским реологическим моделям Гука, Максвелла и Кельвина-Фойгта. Взяв совокупность моделей можно более-менее адекватно описать механические свойства реальной биологической среды.

Для моделирования реологических моделей была использована система компьютерной математики Matlab. На входном языке системы Matlab был написан модуль для моделирования и исследования реологических моделей. Описание алгоритма работы модуля приведено ниже:

В качестве входного воздействия каждой из трех основных реологических моделей вязкоупругих тел использована вынуждающая сила в форме гармонического сигнала вида:

$$\sigma = f_0 \cos(\omega t). \quad (2)$$

Приравняв уравнение входного сигнала с уравнением модели, выраженным через механическое напряжение:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (3)$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{f_0 \cos(\omega t) - E\varepsilon}{\eta}, \quad (4)$$

Для решения полученного уравнения используем одну из встроенных в среду Matlab функций-решателей обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для выбора функции для решения ОДУ проведем анализ средств решения задачи Коши для систем вида:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, y_2, \dots), \\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, y_2, \dots), \\ &\dots \\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

описывающих «хорошие» динамические системы. Под «хорошими» имеются в виду системы с достаточно гладкими решениями – амплитуды колебаний неизвестных функций $y_i(t)$ и их основные гармоники не очень сильно отличаются друг от друга [18].

Версия MatLab-14a предлагает для решения «хороших» систем типа (5) три процедуры (см. таблицу 1), выбор которых и подбор соответствующих управляющих параметров полностью возлагаются на пользователя:

Таблица 1 – процедуры Matlab для решения ОДУ

№	Имя функции	Пояснение
1	ode23	Метод Рунге-Кутты 2/3 порядка в модификации Богацки-Шампина
2	ode45	Метод Рунге-Кутты 4/5 порядка в модификации Дорманда-Принца
3	ode113	Метод Адамса в модификации Башфорга-Моултона

Теперь о некоторых сравнительных характеристиках процедур интегрирования, приведенных в таблице 1. Все измерения были проделаны на примере гармонического осциллятора, который в случае отсутствия затухания ($\beta=0$) имеет простое аналитическое решение:

$$y_1 = \omega \sin\left(\frac{t}{\omega}\right), y_2 = \cos\left(\frac{t}{\omega}\right). \quad (6)$$

В таблице 2 приведены результаты интегрирования затухающего осциллятора ($\omega = 0.5, \beta = 0.2$). С относительной точностью порядка $1e-3$ они дают сходные результаты, но количество вычислений правой части и количество результатов в построенных массивах отличается довольно сильно. Из таблицы 2 видно, что для данной задачи наиболее эффективной оказалась процедура ode113 [18].

Разработка инструментального средства моделирования для исследования простейших моделей вязкоупругих тел

Таблица 2. Результаты интегрирования затухающего осциллятора

	ode23	ode45	ode113
y1(10)	0.006226	0.006330	0.006340
Y2(10)	0.010901	0.010880	0.010894
Длина массива t	93	125	68
Вычисление правых частей	301	187	137

Для данного исследования на примере простейшей реологической модели Максвелла на интервале времени от 0 до 1 программа на языке MatLab может состоять из двух пользовательских функций:

Головная программа (maksvel.m):

```
options = odeset('InitialStep',0.2);
```

```
[t, s] = ode113 (@odefn1, [0 1], 0);
```

```
Plot (t, s, 'k-'); grid on; title ('F');
```

```
Legend ('Модель Максвелла', -1);
```

Функция вычисления правых частей (odefn1.m):
function dydx = odefn1 (t,s)

```
dydx = zeros(1,1);
```

```
dydx(1)=-s/(0.5)*(10.^10)-50*sin(50*t);
```

Схема предлагаемого процесса моделирования для исследования простейших моделей вязкоупругих тел представлена на рисунке 1.

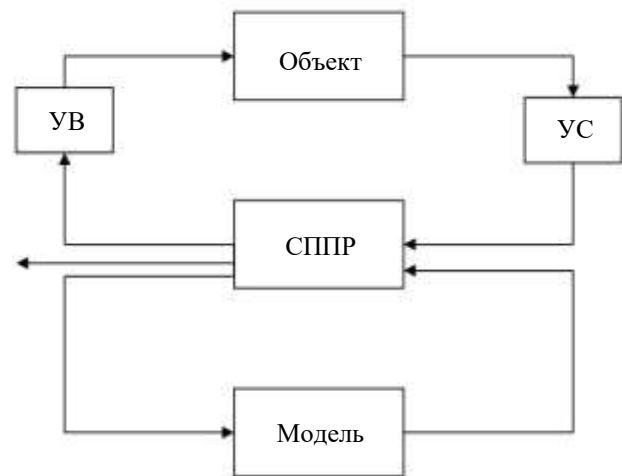


Рис. 1. Схема предлагаемого процесса моделирования

На рисунке 1 изображены следующие элементы:

- УВ – устройство воздействия на объект;
- УС – устройство съема данных с объекта исследования;
- СППР – система поддержки принятия решений;
- Объект – человеческая кость;
- Модель – реологическая модель человеческой кости.

Рассмотрим основные реологические модели для описания опорно-двигательного аппарата человека.

3.1. Модель Гука

В модели Гука (абсолютно упругое тело) примером чисто упругого поведения служит идеально упругая пружина (рис.2).

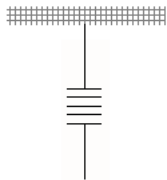


Рис. 2. Упругое тело Гука

Примеры построения входного и выходного сигналов модели упругого тела Гука в среде Matlab представлены на рисунках 3 и 4 соответственно. Сигнал, изображенный на рисунке 3, подан на вход двух других простейших моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта.

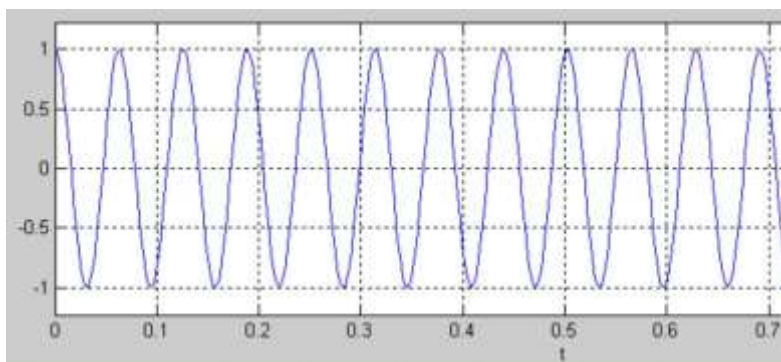


Рис. 3. Входной сигнал реологических моделей

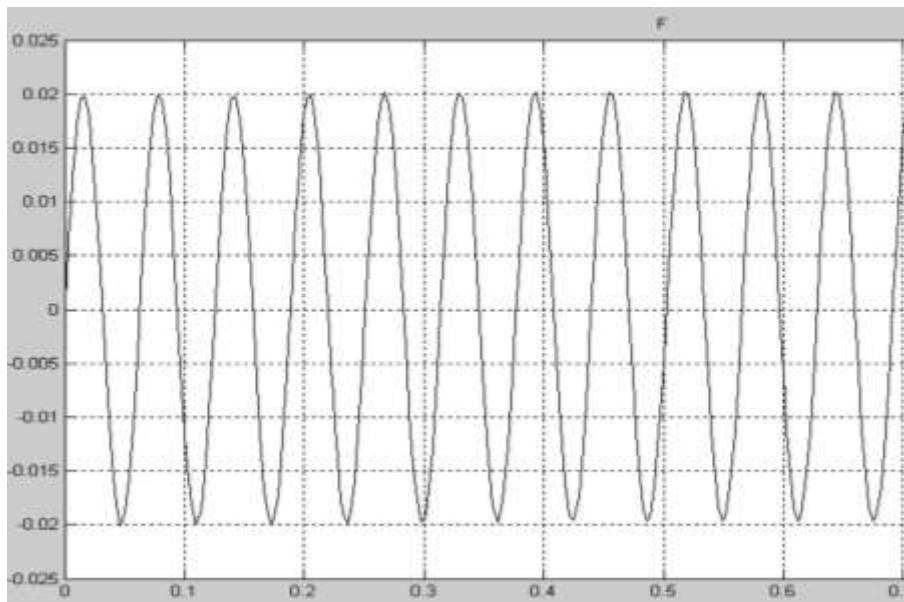


Рис. 4. Выходной сигнал модели Гука

Для костей, при небольших деформациях, также справедлив закон Гука и их упругие свойства можно моделировать поведением обычной пружины:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (7)$$

Закон Гука представляет собой простейшее реологическое уравнение. Длина абсолютно упругих тел изменяется мгновенно под действием приложенной силы до некоторого значения

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (8)$$

и далее не меняется: при $\varepsilon=0$ при $\sigma=\text{const}$ [9].

3.2. Модель Максвелла

Тело Максвелла – это тело, которое под действием напряжения упруго деформируется и в то же время может течь. Это одна из возможных моделей мягких биологических тканей. Представляет собой последовательно соединённые упругий и вязкий элементы (рис.5):

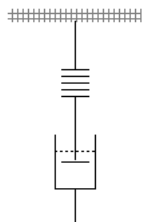


Рис. 5. Вязкоупругое тело Максвелла

Общая деформация подобного тела под влиянием, например сдвиговых напряжений равна сумме его упругой деформации и деформации течения, т.е.:

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_\eta \text{ или } \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_\eta, \quad (9)$$

где $\dot{\varepsilon} = 0$ означает дифференцирование по времени. При этом напряжение на упругом и вязком элементах тела равны. Скорость упругого смещения можно определить из закона Гука, а скорость течения – из закона Ньютона [9]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (10)$$

Гладкие и скелетные мышцы ведут себя в основном подобно телу Максвелла. Это способствует большей растяжимости полых органов, например, кровеносных сосудов или мочевого пузыря, обладающих гладкомышечной мускулатурой [14]. На рисунке 6 представлен выходной сигнал модели Максвелла, построенный с помощью среды Matlab.

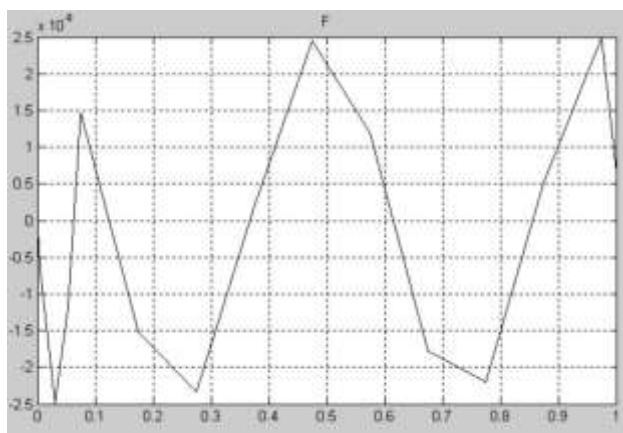


Рис. 6. Выходной сигнал модели Максвелла

Модель Кельвина-Фойгта представляет собой вязкоупругую систему с параллельно расположенными вязким и упругим элементами (рис.7) и запаздывающей упругой реакцией.

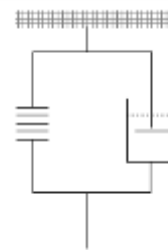


Рис. 7 Вязкоупругое тело Кельвина-Фойгта

Если приложить постоянную силу, то пружина растянется, но вязкий элемент не позволит этому процессу произойти быстро: поршень будет постепенно вытягиваться. Если снять нагрузку, то пружина будет сжиматься постепенно, т.к. быстрому сжатию будет мешать вязкий элемент.

Поведение тела Кельвина-Фойгта описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (11)$$

т.е. полное напряжение распределяется между упругим и вязким элементами [9].

На рисунке 8 представлен выходной сигнал модели Кельвина-Фойгта, построенный с помощью среды Matlab.

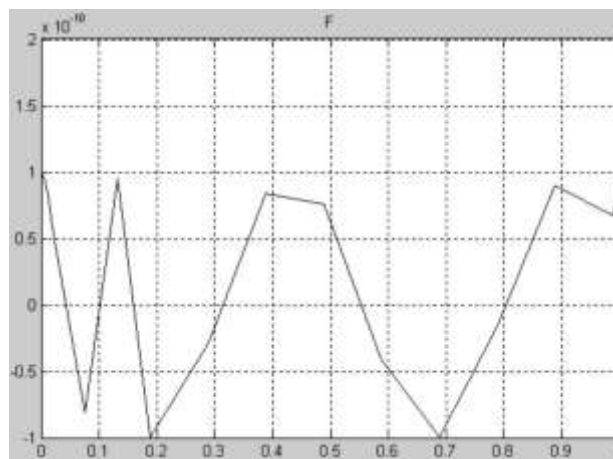


Рис. 8 Выходной сигнал модели Кельвина-Фойгта

Используя реологические модели в качестве описания костной ткани человека можно изучить их различные свойства. Если на вход модели подать механический синусоидальный сигнал в виде звуковой волны, то на выходе получим ряд значений, которые необходимо интерпретировать. Ряд выходных значений представляет собой синусоиду. В процессе интерпретации полученных результатов целесообразно использовать быстрое преобразование Фурье и преобразование Гильберта для определения свойств выходного сигнала, таких как амплитуда и фаза, что позволяет построить амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазо-частотную характеристику (ФЧХ) модели. Преобразование Гильберта позволяет разложить исходный процесс на две составляющие – амплитудную и фазовую [19]. С

простейшим примером такого разложения мы встречаемся при записи гармонической функции синуса или косинуса

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi_0), \quad (12)$$

которая характеризуется амплитудой A – максимальным отклонением от нулевого уровня, и фазой φ :

$$\varphi = 2\pi ft + \varphi_0. \quad (13)$$

Фаза является аргументом гармонической функции, который определяет, сколько периодов функции наблюдается от начального момента времени и каково ее значение в данный момент времени; φ_0 – начальная фаза, т.е. фаза в момент времени $t=0$. Амплитуда гармонической функции не меняется во времени, а фаза линейно растет с коэффициентом пропорциональности f , который носит название частоты. Амплитуда и фаза гармонической функции отражают различную информацию: амплитуда описывает энергию, а фаза характеризует повторяемость процесса во времени, и в этом смысле они могут рассматриваться как независимые характеристики гармонической функции [14,15].

Для установления соответствия создаваемых моделей оригиналу предлагается использовать сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях. Таким образом, представляется возможным определить, насколько характеристики описанных выше моделей схожи с поведением реального механического объекта.

4. Заключение

- Поставлена задача описания свойств компонентов опорно-двигательного аппарата на основе вязкоупругих моделей.
- Подобраны типовые модели, описывающие основные свойства таких моделей.
- Обоснован выбор средства моделирования реологических моделей.
- Исследовано поведение типовых моделей в ответ на гармоническое воздействие с помощью разных средств и обоснован выбор наиболее эффективного.
- Полученные результаты позволяют поставить задачу для исследования АЧХ, ФЧХ типовых схем и обосновать выбор наиболее адекватной из них для описания реакции исследуемых объектов.

5. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-48-020074.

VII Всероссийская научная конференция "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", Уфа-Ставрополь-Ханты-Мансийск, Россия, 2019

Список используемых источников

1. Воропаева О.Ф., Шокин Ю.И. Численное моделирование в медицине: некоторые постановки задач и результаты расчётов // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17. – № 4. – С. 29-55.
2. Дедов И.И., Тюльпаков А.Н., Чехонин В.П. и соавт. Персонализированная медицина: современное состояние и перспективы. Вестник // РАМН, 2012. № 67 (12). С. 4-12.
3. Лившиц В. Персонализированная медицина // Российский литературный портал, предоставляющий авторам возможность свободной публикации произведений. – 2013. № 213061901636.; URL: <https://www.proza.ru/2013/06/19/1636> (дата обращения: 30.03.2019).
4. Чем можно заменить рентген? // Портал о здоровье. – 2014.; URL: <http://ru.likar.info/metodyi-diagnostiki/article-66809-chem-mozhno-zamenit-rentgen/Likar.info> (дата обращения: 30.03.2019).
5. .Алексеев С.В., Иванов Н.Г, Лосев В.Ф., Панченко Ю.Н. Исследование параметров фемтосекундных импульсов в лазерно-титановой лазерной системе // Доклады V Всероссийской конференции «Взаимодействие высококонцентрированных потоков энергии и материалов в перспективных технологиях и медицине». – Новосибирск, 26-29 марта 2013 г.
6. Реология, перевод с англ. / М. Рейнер. – Москва: Химия, 1977. – 440 с.
7. Воларович М. П., Малинин Н. И., Исследования в области феноменологической реологии, «Инженерно-физический журнал» // 1969, т. 16, № 2.
8. Влияние смазочных масел на надежность и долговечность машин / Ю.А. Розенберг. – Москва: Машиностроение, 1970. – 103с.
9. Биореология / С.У. Муслев. Методические пособия. – Москва: МГМСУ, 2013.
10. Нелинейные вязкоупругие свойства биологических тканей / А.В. Кобелев, Л.Т. Смолюк, Р.М. Кобелева, Ю.Л. Проценко. – Москва: РАН, 2012.
11. Вязкоупругие свойства полимеров / Ферри Дж. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. – 535 с.
12. Rheology: Theory and Applications. / Edited by Frederick R. Eirich. - Brooklyn, New York.: Academic Press Inc., Publishers, 1956.
13. Малинин Н. И. Реология. // БУК ВО «Областная универсальная научная библиотека». – № 557 .

URL:

<https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/096/557.htm>
(дата обращения: 30.03.2019).

14. Петров И.Б. Математическое моделирование в медицине и биологии на основе моделей механики сплошных сред // Труды МФТИ. 2009. Т. 1, № 1. с. 5.
15. Antigoni A, Groumpos P. A new mathematical model for fuzzy cognitive maps-application to medical problems/ // Системная инженерия и информационные технологии–2019.–№1.– С.63-66.
16. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли – Москва: Мир, 1970. – 326 с.
17. . Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. – Москва: Химия, 1977. – 440 с.
18. Моделирование в биомеханике / П.И. Бегун, П.Н. Афонин. – Москва: Высшая школа, 2004. – 389 с.
19. Кетков Ю.Л., Кузнецов А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения MatLab versus MathCAD. // Математика в высшем образовании. 2005 г. №3. С. 27-52.
20. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x / П.И. Рудаков, В.И. Сафонов. – Москва: Диалог-МИФИ, 2000. – 416 с.
21. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. / М. С. Куприянов, Б. Д. Матюшкин. – СПб.: Политехника, 1999. – 592 с.