

# Кавитационное обтекание кругового выступа весомой жидкостью по схеме Рябушинского

Н.И. Житникова  
Факультет информатики и робототехники  
Уфимский государственный авиационный  
технический университет  
Уфа, Россия  
e-mail: zhitnikova\_ni@mail.ru

Т.Ф. Киреев  
Общенаучный факультет  
Уфимский государственный авиационный  
технический университет  
Уфа, Россия  
e-mail: kireevtf@mail.ru

И.М. Гильметдинов  
Общенаучный факультет  
Уфимский государственный авиационный  
технический университет Уфа, Россия  
e-mail: mrswad@mail.ru

## Аннотация<sup>1</sup>

В данной работе исследуется кавитационное обтекание кругового цилиндра идеальной весомой жидкостью по схеме Рябушинского. Рассчитывается форма свободной границы и анализируются зависимости коэффициента сопротивления, скорости жидкости в наивысшей точке границы каверны, длины и ширины каверны от положения точки отрыва.

**Ключевые слова:** кавитационное обтекание; комплексный потенциал; функция Жуковского; оценка погрешности.

## 1. Введение

Рассматривается задача кавитационного обтекания идеальной весомой жидкостью кругового цилиндра по схеме Рябушинского (рис. 1), согласно которой для замыкания каверны вводится замыкатель  $B'C'$ , симметричный кавитатору  $BC$ . Слой жидкости над цилиндром считается достаточно большим, так что влияние стенки или свободной поверхности не оказывает существенного влияния на течение вокруг препятствия. Такой схемой может моделироваться обтекание выступа на дне.

Подобная задача для обтекания пластины решалась Л.М. Котляром [1]. Кавитационное обтекание кругового цилиндра невесомой жидкостью исследовано в [2]. В данной работе особое внимание

уделяется исследованию зависимостей параметров от положения точки отрыва от поверхности цилиндра.

Пусть давление в каверне равно  $P_0$ , давление на бесконечности на оси  $X - P_\infty$ . Число кавитации определяется как

$$K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $V_\infty$  – скорость на бесконечности.

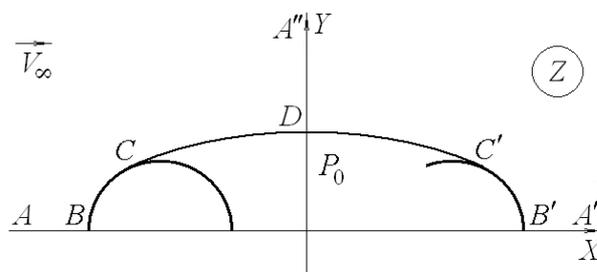


Рис. 1. Схема течения (физическая плоскость)

## 2. Постановка и метод решения задачи

Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{V^2}{V_\infty^2} + \frac{2gR}{V_\infty^2} \frac{Y}{R} + 2 \frac{P}{\rho V_\infty^2} = 2 \frac{P^*}{\rho V_\infty^2} = 1 + 2 \frac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}.$$

На границе каверны  $P=P_0$ , тогда получим краевое условие в виде

$$\left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 + \frac{2}{Fr^2} \frac{Y}{R} = 1 + K, \quad Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gR}}. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Труды Седьмой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-30 мая, Уфа-Ставрополь, Ханты-Мансийск, Россия, 2019

Обозначим гипотетическую скорость на части оси  $X$  внутри каверны  $V=V_0$ , тогда

$$\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2 = 1 + K. \quad (2)$$

Для решения задачи применяются методы теории функций комплексного переменного.

На плоскости комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  образом верхней половины области течения является верхняя полуплоскость (рис. 2)

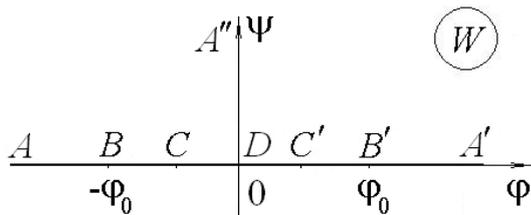


Рис. 2. Плоскость комплексного потенциала

В виду симметрии области течения относительно действительной и мнимой оси рассмотрим левую верхнюю ее четверть. В качестве параметрической выберем плоскость  $\zeta$ , на которой образом четверти области течения будет четверть единичного круга (рис. 3).

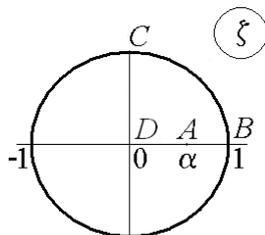


Рис. 3. Параметрическая плоскость  $\zeta$

Функция  $W(\zeta)$  получается с помощью конформного отображения

$$W = -\varphi_0 \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\zeta^4 + 1}{\zeta^2} \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Производная

$$\frac{dW}{d\zeta} = -\varphi_0 \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \frac{\zeta}{\left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\zeta^4 + 1}{\zeta^2} \right)^{3/2}} \left( 1 - \frac{1}{\zeta^4} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию Жуковского

$$\omega = i \ln \left( \frac{dW}{V_0 dZ} \right) = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{V}{V_0}, \quad (5)$$

область изменения которой представлена на рис. 4.

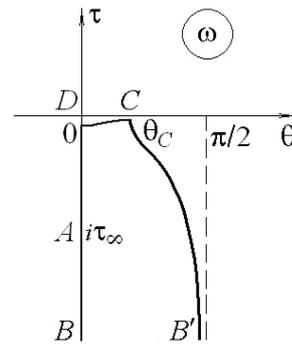


Рис. 4. Плоскость изменения функции Жуковского

Для задачи о течении невесомой жидкости ( $V=V_0$  на  $CD$ ) условия на границах (рис. 1):

$$\text{— на } CD : \tau = \text{Im } \omega = 0, \quad (6)$$

$$\text{— на } BA \text{ и } AD : \theta = \text{Re } \omega = 0, \quad (7)$$

$$\text{— на } BC : |Z| = R. \quad (8)$$

Согласно условиям (6), (7) функцию  $\omega(\zeta)$  можно аналитически продолжить на весь круг по принципу симметрии.

Выразим функцию Жуковского в виде суммы

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta), \quad (9)$$

где  $\omega_0(\zeta)$  – функция Жуковского для задачи кавитационного обтекания пластины невесомой жидкостью по схеме Рябушинского. Для этой задачи условия (6), (7) дополняются условием

$$\text{— на } BC : \theta = \text{Re } \omega = \pi/2.$$

Тем самым, образом области течения на плоскости  $\omega$  для этой задачи является полуполоса. Функция  $\omega_0(\zeta)$  получается конформным отображением

$$\omega_0(\zeta) = i \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \pi + i \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1}. \quad (10)$$

Функция  $\omega_1(\zeta)$  определяется в виде ряда по нечетным степеням с действительными коэффициентами  $c_{2m+1}$

$$\omega_1(\zeta) = i \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \zeta^{2m-1}. \quad (11)$$

Для моделирования течения весоной жидкости условие (6) должно быть заменено на (1). При этом мнимая часть  $\omega(\zeta)$  не равна нулю на  $CD$  и сумма (9) дополняется слагаемым

$$\omega_2(\zeta_1) = i \sum_{m=0}^{\infty} d_{2m} \zeta_1^{2m} = i \sum_{m=0}^{\infty} d_{2m} \left( -i \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{2m}, \quad (12)$$

которое определено на параметрической плоскости  $\zeta_1$  (рис. 5), связанной с  $\zeta$  следующим образом

$$\zeta_1 = -i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \quad i\alpha_1 = -i \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = i \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (13)$$

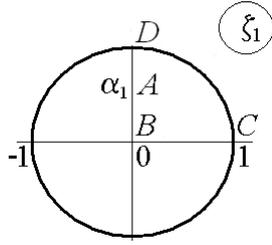


Рис. 5. Параметрическая плоскость  $\zeta_1$

Отметим, что видоизменение вида функции Жуковского для удовлетворения условию (1) не может быть осуществлено путем добавления в (11) нечетных слагаемых, в связи с невозможностью аналитического продолжения  $\omega(\zeta)$  на левый полукруг и разложения в сходящийся ряд Тейлора. Функция же  $\omega_2(\zeta_1)$  имеет нулевую действительную часть как на  $BC$ , так и на  $DAB$ , и поэтому для ее аналитического продолжения на круг может быть применен принцип симметрии.

Производная функции Жуковского

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{2i}{\zeta^2 - 1} + i \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) c_{2m-1} \zeta^{2m-2} + \frac{2}{(\zeta+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2m d_{2m} \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{2m-1}. \quad (14)$$

Уравнение окружности  $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R}$  с учетом того, что на границе потока дифференциал дуговой абсциссы  $ds = \frac{d\varphi}{V} = e^{-\tau} \frac{d\varphi}{V_0}$ , примет вид

$$\frac{d\theta}{ds} = V_0 e^{\tau} \frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{1}{R}. \quad (15)$$

Поскольку на  $BC$   $\zeta = e^{i\sigma}$ , то из (4) найдем

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \varphi_0 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha\sqrt{2}} \frac{\sin 2\sigma}{\left( \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \cos 2\sigma \right)^{3/2}}. \quad (16)$$

Тогда из (15) получим краевое условие на  $BC$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\lambda e^{-\tau(\sigma)} \frac{\sin 2\sigma}{\left( \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \cos 2\sigma \right)^{3/2}}, \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} \frac{\varphi_0}{RV_0}.$$

Отсюда при  $\sigma \rightarrow 0$  (точка  $B$ )

VII Всероссийская научная конференция "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", Уфа-Ставрополь-Ханты-Мансийск, Россия, 2019

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) c_{2m-1} = -\lambda e^{-\sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} d_0} \frac{8\sqrt{2}\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3}. \quad (18)$$

При  $\sigma \rightarrow \pi/2$  (точка  $C$ ) из (17) следует

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1)^2 c_{2m-1} = -e^{-\sum_{m=0}^{\infty} d_{2m}} \frac{4\sqrt{2}\alpha^3 \lambda}{(\alpha^2 + 1)^3}. \quad (19)$$

При заданном числе кавитации  $K$  выполняется уравнение

$$\tau(\alpha) = \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \alpha^{2m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m d_{2m} \left( \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)^{2m} = -\frac{1}{2} \ln(K+1). \quad (20)$$

Если рассматривается течение с гладким отрывом струи от кавитатора (в точке  $C$ ), то выполняется условие Бриллюэна-Вилла

$$\frac{d\tau}{d\zeta}(i) = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) c_{2m-1} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} m d_{2m} = 0. \quad (21)$$

Задача решалась в безразмерном виде: параметры  $R$  (радиус цилиндра) и  $V_0$  полагались равными единице. Для возвращения к размерным величинам линейные величины умножаются на реальный размер  $R$ , а скорости – на  $V_0$ .

Численно задача решалась методом коллокаций. Уравнение окружности (17) удовлетворялось в отдельных точках дуги  $BC$   $\zeta_m = e^{i\sigma_m}$  ( $\sigma_m = m\pi/(2n)$ ,  $m = \overline{1, n-1}$ ). Для выполнения условия (17) в точке  $\sigma_0 = 0$  использовалось равенство (18).

Уравнение (1) также удовлетворялось в отдельных точках дуги  $CD$   $\zeta_{1_m} = e^{i\sigma_m}$  ( $\sigma_m = m\pi/(2n)$ ,  $m = \overline{1, n}$ ).

В точке отрыва либо удовлетворялось условие Бриллюэна (21), чему соответствует угол отрыва  $\theta_C = \theta_{C_0}$ , либо величина  $\theta_C$  задавалась.

Получаемая при этом система  $2n+2$  нелинейных уравнений (совместно с равенством (20)) относительно параметров  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $c_{2m-1}$  ( $m = \overline{1, n}$ ),  $d_{2m}$  ( $m = \overline{0, n-1}$ ) решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям.

### 3. Численные результаты

При решении исследовано поведение безразмерных параметров

– коэффициента сопротивления

$$C_x = \frac{2}{\rho V_\infty^2 R} \operatorname{Im} \int_0^{Z_C} (P - P_0) dZ =$$

$$= (1+K) \operatorname{Im} \int_0^{Z_C} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) \frac{dZ}{R} - \frac{2}{Fr^2} \int_0^{Y_C} \frac{Y}{R} dY =$$

$$= (1+K) \operatorname{Im} \int_0^{Z_C} \left(1 - e^{2\tau}\right) \frac{dZ}{R} - \frac{1}{Fr^2} \frac{Y_C^2}{R^2},$$

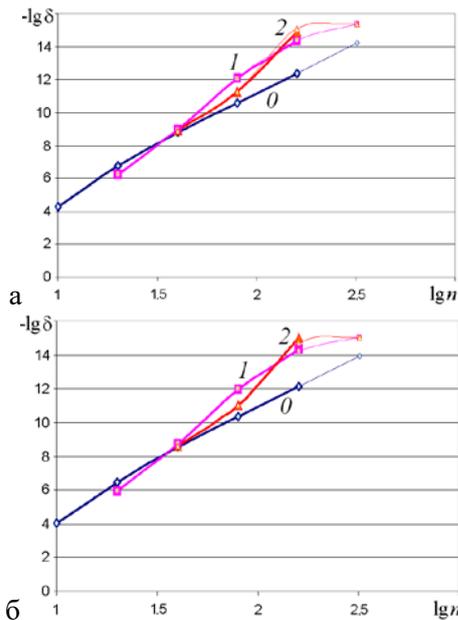
– скорости жидкости в наивысшей точке  $D$  границы каверны

$$\frac{V_D}{V_\infty} = \sqrt{1+K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}},$$

– полудлины и полуширины каверны

$$x_D + iy_D = \frac{1}{R} \int_0^{Z_D} dZ = \frac{1}{RV_0} \int_1^i e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta + \frac{1}{RV_0} \int_i^0 e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta.$$

Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов [3], полученных при различных числах точек коллокаций  $n$ . В отличие от задач, рассмотренных в [4], в данном случае погрешность имеет не случайный характер, а представляется в виде суммы степенных функций  $n$ .



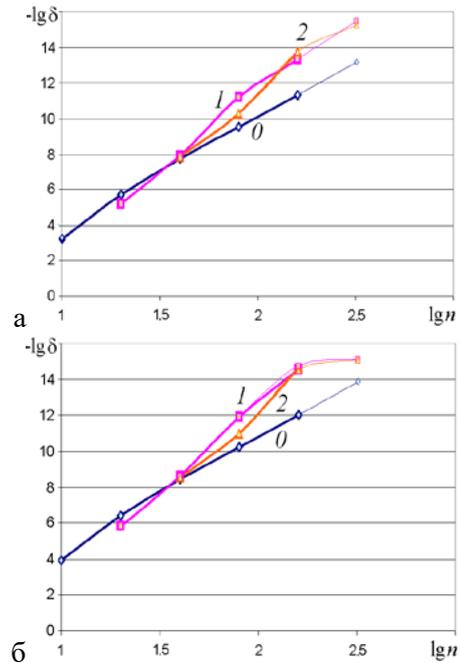
**Рис. 6. Оценка погрешности параметров: а –  $C_x$ ; б –  $V_D/V_\infty$  для  $K=3, Fr=1$**

Результаты фильтрации изображены на рис. 6, 7, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа  $n$ , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра  $\delta = |\Delta u / u|$ .

Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2, ... – результаты 1-й 2-й и т.д. фильтрации. Толстыми линиями показаны результаты попарного вычитания, тонкими –

сравнения с эталоном [3]. Эти результаты показывают, что для приведенных вариантов рассматриваемые величины определяются с относительной погрешностью около  $10^{-14}$ .

Вычисленные значения: для  $K=3, Fr=1$ :  
 $C_x=2.05652555285525$ ;  $\theta_C=0.40711777812$ ;  
 $V_D/V_\infty=1.23514949742572$ ;  $x_D=3.98129071176209$ ;  
 $y_D=1.23720285950449$ .



**Рис. 7. Оценка погрешности параметров: а –  $x_D$ ; б –  $y_D$  для  $K=3, Fr=1$**

На рис. 8, 9 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для течений, удовлетворяющих условию (21) при  $K=1; 2; 3; 4$  (кривые 1 – 4) от числа, обратного числу Фруда ( $1/Fr$ ).

Следует отметить, что бесконечный рост числа  $Fr$  возможен только для  $K \leq 3$ . Для  $K > 3$  при увеличении  $Fr$  в данной модели свободная поверхность сжимается в точку, происходит смыкание кавитатора и замыкателя, т.е. в пределе реализуется безотрывное обтекание кругового цилиндра. При безотрывном обтекании

$$\frac{V_D}{V_\infty} = 2 = \sqrt{1+K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}}.$$

Тогда, так как  $Y_D = R, \theta_C = 0$ , то

$$\frac{1}{Fr} = \sqrt{\frac{K-3}{2}}.$$

В предельном решении

$$C_x = K - \frac{1}{3} - \frac{K-3}{2}.$$

Конкретные значения этих и других параметров получаются численно.

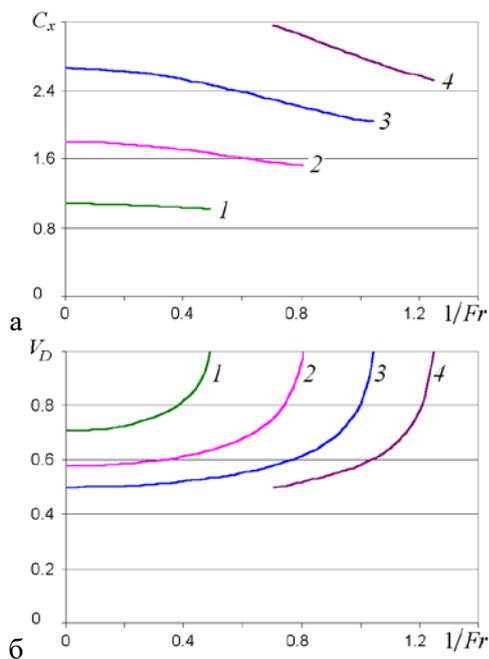


Рис. 8. Зависимости параметров от  $1/Fr$ : а –  $C_x$ ; б –  $V_\infty/V_D$

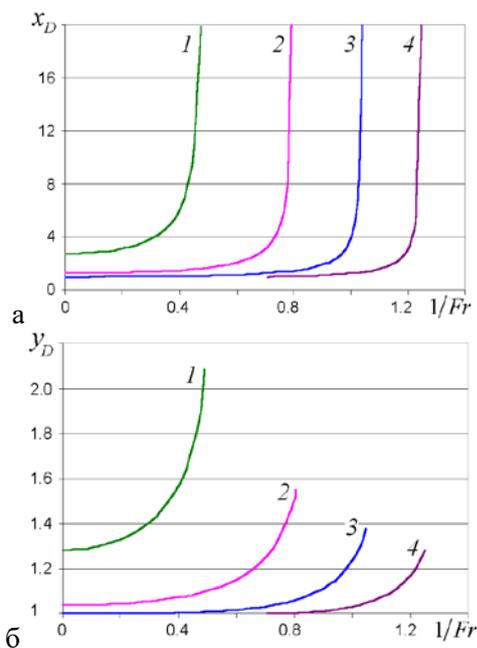


Рис. 9. Зависимости параметров от  $1/Fr$ : а –  $x_D$ ; б –  $y_D$

На рис. 10, 11 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для  $K=3$  от дуговой абсциссы  $\gamma = \pi/2 - \theta_C$  (кривые 0 - 4 соответствуют  $Fr = \infty; 2.5; 1.25; 1; 0.97$ ). Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия (21) ( $\theta_C = \theta_{C_0}$ ), отмечено на графиках жирной точкой.

Видно, что при  $\theta_C = \theta_{C_0}$  зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

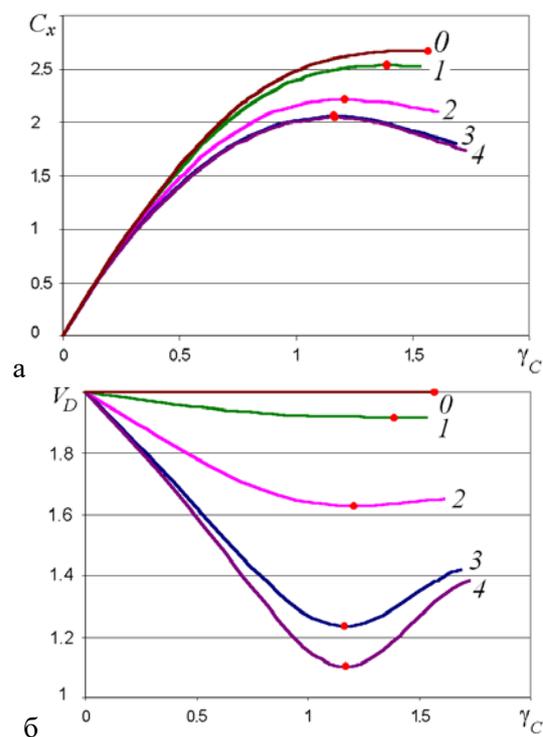


Рис. 10. Зависимости параметров от  $\gamma$ : а –  $C_x$ ; б –  $V_D/V_\infty$

Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма грубо, поскольку точность передачи графической информации обычно не превышает двух значащих цифр (погрешность  $\geq 0.01$ ) от диапазона исследования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид  $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$ , то при определении  $y_0$  с погрешностью 0.01, значение  $x_0$  определяется примерно до 0.1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна более высокая точность и другая форма графического представления.

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает  $10^{-12}$ . Согласно этому, выберем шаг по параметру  $\theta_C$  равным  $10^{-6}$  и рассмотрим разности  $\Delta u = u - u_0$  в зависимости от  $\Delta \theta_C = \theta_C - \theta_{C_0}$ , где  $u_0, \theta_{C_0}$  – значения параметров  $u$  и  $\theta_C$  при выполнении (21).

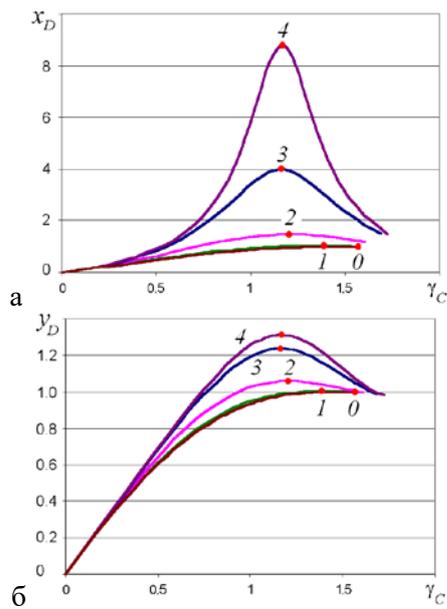


Рис. 11. Зависимости параметров от  $\gamma$ : а –  $x_D$ ; б –  $y_D$

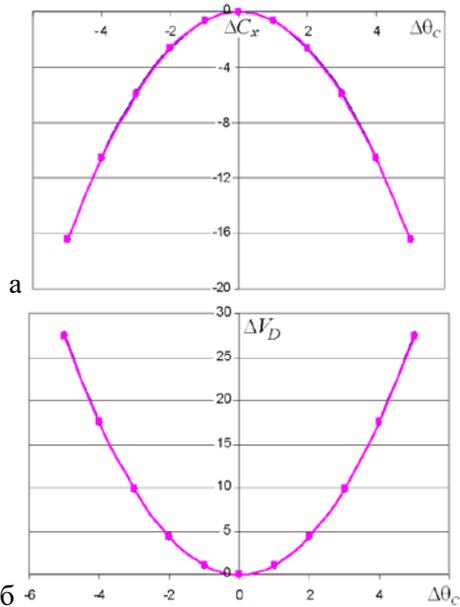


Рис. 12. Зависимости приращения параметров от приращения  $\Delta\theta_c$ : а –  $\Delta C_x$ ; б –  $\Delta V_D/V_\infty$

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 12, 13. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна  $10^{-6}$ , по оси ординат –  $10^{-12}$ . На точечные графики зависимостей нанесен график функции  $f(x) \approx kx^2$  с подобранными коэффициентами  $k$ . Как показывают графики, положение экстремума с высокой точностью совпадает с  $\theta_{c0}$ , а зависимости близки к квадратичным.

#### 4. Заключение

Таким образом, в данной работе с помощью видоизмененного метода Леви-Чивиты проведено численное решение задачи о кавитационном обтекании полукруглого выступа на дне потоком несомой жидкостью.

Кавитационное обтекание кругового выступа несомой жидкостью по схеме Рябушинского

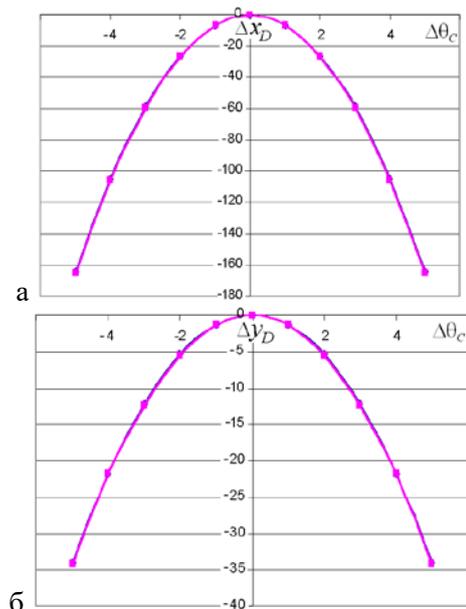


Рис. 13. Зависимости приращения параметров от приращения  $\Delta\theta_c$ : а –  $\Delta x_D$ ; б –  $\Delta y_D$

Исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Применение технологии фильтрации численных результатов позволило установить этот факт с высокой точностью.

#### Благодарности

Авторы благодарят РФФИ за содействие в проведении работы. Работа поддержана грантом РФФИ 17-07-00356.

#### Список используемых источников

1. Котляр Л.М., Троепольская О.В. О некоторых течениях с развитой кавитацией в поле силы тяжести // Вопр. прикл. матем. и мех. Чебоксары: Чуваш. ун-т., 1974. Вып.3. С. 86-95.
2. Теория струй идеальной жидкости / Гуревич М.И. — М.: Наука, 1979. — 536 с.
3. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // СПб. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(80). С. 105–110.
4. Fabrisov T. I., Yusupova N. I., Ding K., Morozov A., Janschek K. Analytical toolset for model-based stochastic error propagation analysis; extension and optimization towards industrial requirements // Системная инженерия и информационные технологии. 2019. Т. 1, № 1. С. 41–46.