

Решение задачи отрывного обтекания мягкой воздухоопорной оболочки

Н.И. Житникова
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: zhitnikova_ni@mail.ru

Г.И. Федорова
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: g_fed@mail.ru

Г.Р. Максютова
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: maksyutova.gulshat@mail.ru

Аннотация¹

Рассматривается задача обтекания идеальной жидкостью воздухоопорной цилиндрической оболочки для исследования характеристик одного из возможных типов надувных сооружений. Для оценки погрешности и уточнения численных результатов используются методы фильтрации, что позволяет исследовать тонкие эффекты.

Ключевые слова: гидроупругость, функции комплексного переменного, метод Леви-Чивиты, коллокации, фильтрация численных результатов.

1. Введение

Задача обтекания идеальной жидкостью воздухоопорной оболочки имеет практическое применение при исследовании взаимодействия ветровой нагрузки с надувными конструкциями типа ангаров и т. п.

И.Л. Галиной [1] рассмотрено решение задачи об истечении струи из канала с гибким ограждением в случае равенства давления внутри оболочки и константы Бернулли потока и без учета геометрии конструкции. В работе [2] проводится численное исследование решений для задачи обтекания оболочки вблизи экрана. В данной работе

рассмотрена задача обтекания оболочечной конструкции полубесконечным потоком. С помощью технологии фильтрации численных результатов [3, 4] подробно рассматривается поведение характерных параметров при смещении точки отрыва потока относительно положения, соответствующего гладкому отрыву – условию Бриллюэна – Вилла (конечности кривизны поверхности струи в точке отрыва).

При исследовании кавитационного обтекания кругового цилиндра [5] было замечено, что зависимости многих параметров имеют локальные экстремумы при выполнении этого условия. Однако в связи с ограничением точности расчетов соображениями «здравого смысла» этот вывод вызывал некоторые сомнения, поскольку количество верных знаков, с которыми определяется точка экстремума, как правило, в два раза меньше, чем в вычисленном значении исследуемой функции. Кроме того, теоретический интерес имеет проверка справедливости этого вывода в случае обтекания оболочки, форма которой существенно меняется при изменении положения точки отрыва.

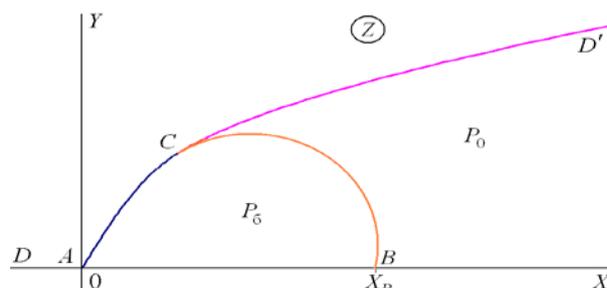


Рис. 1. Схема течения (физическая плоскость)

¹Труды Седьмой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-30 мая, Уфа-Ставрополь, Ханты-Мансийск, Россия, 2019

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, оба конца которой (A и B) закреплены. Скорость потока на свободной линии тока CD' равна V_0 . На линии DA вектор скорости параллелен оси X (рис.1).

2. Постановка и метод решения задачи

На смоченной части оболочки AC должно удовлетворяться уравнение Лапласа

$$T = R(P_b - P) = \text{const}, \quad (1)$$

где R – радиус кривизны оболочки ($R > 0$, если оболочка выпукла в сторону жидкости), P – давление в потоке; P_b – давление внутри оболочки; T – натяжение оболочки.

При небольших перепадах давлений, характерных для обтекания надувных конструкций, воздух можно моделировать идеальной невязкой несжимаемой жидкостью. Тогда условие (1) с учетом уравнения

$$\text{Бернулли} \quad \rho \frac{V^2}{2} + P = P^*, \quad \rho \frac{V_0^2}{2} + P_0 = P^*$$

целесообразно записать в дифференциальной форме

$$T = \pm \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \left(P_b - P^* + \rho \frac{V^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{\rho V_0^2}{2T} \left(\mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right), \quad \mu = \frac{P_b - P_0}{P^* - P_0}, \quad (2)$$

где V – модуль вектора скорости; θ – угол между вектором скорости и осью X ; s – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки A ; P_0 , V_0 – давление и модуль скорости на свободной поверхности; P^* – константа Бернулли. В формуле (2) выбирается знак «-», так как, согласно рис 1, угол наклона вектора скорости θ при $\mu > 1$ уменьшается вниз по потоку.

Для решения этой задачи используются методы теории функций комплексного переменного, аналогично [2].

Решение задачи можно проводить на 4-й четверти единичного круга области изменения параметрического переменного ζ . Отобразим физическую плоскость Z на ζ так, чтобы бесконечно удаленная точка D перешла в точку $\zeta=0$, а граница, соответствующая оболочке, в четверть окружности (рис. 2). Далее функция, представляемая в виде степенного ряда, будет аналитически продолжена на весь круг.

Тогда комплексный потенциал, областью изменения которого является верхняя полуплоскость (рис. 3) равен

$$W = \frac{\Phi_0}{4} \left(\frac{1}{\zeta^2} + \zeta^2 + 2 \right),$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\Phi_0}{2} \left(-\frac{1}{\zeta^3} + \zeta \right) = \frac{\Phi_0}{2\zeta} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right). \quad (3)$$

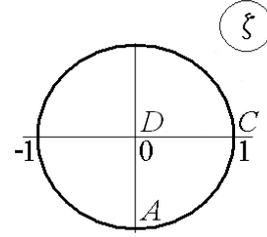


Рис. 2. Параметрическая плоскость ζ

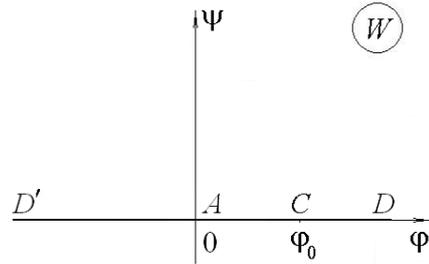


Рис. 3. Плоскость комплексного потенциала

Действительно, на AC ($\zeta = e^{i\sigma}$, $-\pi/2 \leq \sigma \leq 0$)

$$W = \frac{\Phi_0}{4} (e^{-2i\sigma} + e^{2i\sigma} + 2) = \frac{\Phi_0}{2} (\cos 2\sigma + 1),$$

$$\frac{dW}{d\sigma} = -\Phi_0 \sin 2\sigma.$$

Тогда дифференциал дуговой абсциссы на участке границы AC

$$ds = \frac{1}{V} \frac{dW}{d\sigma} d\sigma = -\frac{\Phi_0}{V} \sin 2\sigma d\sigma. \quad (4)$$

С учетом (4) условие (2) преобразуется

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{d\theta}{d\sigma} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^{-1} = \\ &= -\frac{d\theta}{d\sigma} \frac{1}{\frac{\Phi_0}{V} \sin 2\sigma} = -\frac{\rho V_0^2}{2T} \left(\mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right), \\ \frac{d\theta}{d\sigma} &= \frac{\lambda}{2} \left((\mu - 1) \frac{V_0}{V} + \frac{V}{V_0} \right) \sin 2\sigma, \quad \lambda = \frac{\rho V_0 \Phi_0}{T}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача решается с помощью функции Жуковского $\omega = i \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dZ} = \theta + i\tau$. Так как $\frac{dW}{dZ} = V e^{-i\theta}$, то

$$\omega = \theta + i\tau, \quad \text{где } \tau = \ln \frac{V}{V_0}.$$

Функция $\omega = \theta + i\tau$ должна удовлетворять следующим граничным условиям (см. рис.4):

– $\text{Re} \omega = 0$ на DA ;

Решение задачи отрывного обтекания мягкой воздухоопорной оболочки

- $\text{Im}\omega = 0$ на CD ;
- уравнению (5) на AC .

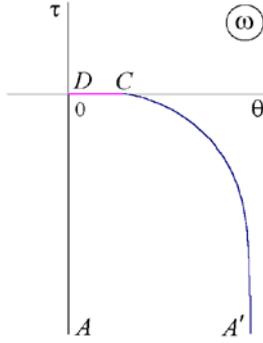


Рис. 4. Плоскость изменения функции Жуковского

Для выбора вида функции $\omega(\zeta)$ установим поведение функции $\theta(\sigma)$ вблизи критической точки $\sigma = -\pi/2$. Поскольку вблизи угловой точки A $W - W_A \sim (\zeta + i)^2$, $z - z_A \sim (W - W_A)^{(1-\beta/2)}$, ($\beta = 2\theta_A/\pi$), то скорость

$$V = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \left| \frac{dz}{dW} \right|^{-1} \sim |W - W_A|^{\beta/2} \sim |\zeta + i|^\beta,$$

т.е. $V \approx V_0 \gamma \left| \sigma + \frac{\pi}{2} \right|^\beta,$

где γ – некоторая постоянная. Тогда из (5) следует

$$\frac{d\theta}{d\sigma} \approx \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu-1}{\gamma} \left(\frac{\pi}{2} + \sigma \right)^{1-\beta} + \gamma \left(\frac{\pi}{2} + \sigma \right)^{1+\beta} \right), \quad \sigma \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0. \quad (7)$$

После интегрирования и замены разности $\pi/2 + \sigma$ на эквивалентную бесконечно малую величину $\cos \sigma$ имеем

$$\theta \sim \theta_A + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu-1}{(2-\beta)\gamma} \cos^{2-\beta} \sigma + \frac{\gamma}{2+\beta} \cos^{2+\beta} \sigma \right).$$

Согласно видоизмененному методу Леви-Чивиты, функцию $\omega = \theta + i\tau$ представим в виде суммы

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2.$$

В соответствии с условиями (6) функция $\omega(\zeta)$ является нечетной.

Функция $\omega_0(\zeta)$ должна иметь нужные скачки угла θ (в точках излома границ). В качестве такой функции используем функцию Жуковского для отрывного обтекания прямолинейной пластины AC , отклоненной на угол θ_A от оси X

$$\omega_0 = \beta i \ln \frac{1-i\zeta}{1+i\zeta} = \beta i \ln \frac{-\zeta-i}{-i+\zeta} = \beta i \ln \frac{\zeta+i}{\zeta-i} - \pi\beta. \quad (9)$$

Функция $\omega_1(\zeta)$ представляет собой степенной ряд и служит для удовлетворения граничному условию (5)

$$\omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \zeta^{2m+1}. \quad (10)$$

Функция $\omega_2(\zeta)$, которая отсутствует в обычном методе Леви-Чивиты, введена для того, чтобы учесть главную часть особенности производной $d\theta/d\sigma$ вблизи точки $\sigma = -\pi/2$. В соответствии с (8)

$$\omega_2 = B_1 \zeta \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2} \right)^{2-\beta}. \quad (11)$$

При $\zeta = e^{i\sigma}$

$$\omega_0 = \beta i \ln \frac{e^{i\sigma} + i}{e^{i\sigma} - i} - \pi\beta = \beta i \ln \frac{\cos \sigma}{1 - \sin \sigma} + \beta \frac{\pi}{2},$$

$$\theta(\sigma) = \theta_A + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \cos(2m+1)\sigma + B_1 \cos(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau(\sigma) = & \beta \ln \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma + \\ & + B_1 \sin(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\sigma} = & - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma - \\ & - B_1 (3-\beta) \sin(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma - \\ & - B_1 (2-\beta) \cos(3-\beta)\sigma \cos^{1-\beta} \sigma \sin \sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\sigma} = & \beta \left(- \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma} + \frac{\cos \sigma}{1 - \sin \sigma} \right) + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m+1} \cos(2m+1)\sigma + \\ & + B_1 (3-\beta) \cos(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma - \\ & - B_1 (2-\beta) \sin(3-\beta)\sigma \cos^{1-\beta} \sigma \sin \sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13) следует

$$\frac{V}{V_0} = e^\tau \approx \left(\frac{\cos \sigma}{1 - \sin \sigma} \right)^\beta \times$$

$$\exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma \right) \approx \gamma \left| \sigma + \frac{\pi}{2} \right|^\beta,$$

$$\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \pi/2} \left(\frac{V}{V_0} \cos^{-\beta} \sigma \right) = 2^{-\beta} \exp \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_{2m+1} \right].$$

Коэффициент B_1 определяется из (14) и условия (5) при $\sigma \rightarrow -\pi/2$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\sigma} &\approx -(2-\beta)B_1 \cos(3-\beta)\sigma \cos^{1-\beta} \sigma \sin \sigma = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left((\mu-1) \frac{V_0}{V} + \frac{V}{V_0} \right) 2 \sin \sigma \cos \sigma. \end{aligned}$$

Согласно (14) и (7)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\sigma} &\approx -(2-\beta)B_1 \cos(3-\beta) \frac{\pi}{2} \cos^{1-\beta} \sigma \approx \\ &\approx \lambda \frac{\mu-1}{\gamma} \cos^{1-\beta} \sigma, \quad \sigma \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0. \\ -(2-\beta)B_1 \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) &= -\lambda \frac{\mu-1}{\gamma}, \\ B_1 &= \lambda \frac{\mu-1}{(2-\beta)\gamma \sin(\pi\beta/2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Условие (5) в точке отрыва C ($\sigma \rightarrow 0$) с учетом (13) и (14) приводит к равенству

$$\begin{aligned} -\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 c_{2m+1} \sigma - \left[(2-\beta) + (3-\beta)^2 \right] B_1 \sigma \\ \sigma = \frac{\lambda}{2} ((\mu-1)+1) 2\sigma, \\ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 c_{2m+1} + \left[(2-\beta) + (3-\beta)^2 \right] B_1 + \lambda\mu = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из определения функции Жуковского и (3) найдем дифференциал

$$dZ = \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \frac{\varphi_0}{V_0} e^{i\omega(\zeta)} \frac{1}{2\zeta} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{\varphi_0}{V_0} x_C = \frac{\varphi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Re} dz, \\ Y_C &= \frac{\varphi_0}{V_0} y_C = \frac{\varphi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Im} dz. \end{aligned}$$

Согласно (2) участок оболочки CB представляет собой дугу окружности радиуса $R_0 = \frac{2T}{\rho V_0^2 \mu} = \frac{2}{\lambda \mu} \frac{\varphi_0}{V_0}$ с центром в точке $X_0 = X_C + R_0 \sin \theta_C$, $Y_0 = Y_C - R_0 \cos \theta_C$. Обозначим через α центральный угол дуги CB , через θ_A , θ_B и θ_C – углы наклона касательной в точках A , B и C оболочки. Тогда длина L всей оболочки ACB будет равна

$$L = \frac{\varphi_0}{V_0} \left(\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda \mu} \right), \quad dZ = \frac{\varphi_0}{V_0} dz. \quad (19)$$

Координаты точки B равны

$$X_B = \frac{\varphi_0}{V_0} x_B = \frac{\varphi_0}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Re} dz - \frac{2}{\lambda \mu} (\sin(\theta_c - \alpha) - \sin \theta_c) \right] \quad (20)$$

$$Y_B = \frac{\varphi_0}{V_0} y_B = \frac{\varphi_0}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Im} dz + \frac{2}{\lambda \mu} (\cos(\theta_c - \alpha) - \cos \theta_c) \right] = 0. \quad (21)$$

Расстояние l между точками закрепления A и B равно X_B .

Их (19)–(21) найдем безразмерные отношения, определяющие конфигурацию оболочки и потока

$$\frac{\varphi_0}{V_0 l} = \varphi^* = \frac{1}{x_B}, \quad (23)$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda \mu}}{x_B}, \quad (24)$$

Кроме того, необходимо определить положение точки отрыва струи от гладкого контура. Если рассматривается течение с выполнением условия конечности кривизны свободной поверхности, то (см. рис. 4)

$$\frac{d\tau}{d\sigma}(0) = -\beta + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m+1} + B_1 (3-\beta) = 0. \quad (26)$$

3. Численный алгоритм и оценка погрешности

Задача решалась в безразмерном виде: параметры l и V_0 полагались равными единице. Заданными являлись параметры μ и L/l . Для возвращения к размерным величинам линейные величины умножаются на реальный размер l , а скорости – на V_0 .

Численно задача решалась методом коллокаций с сохранением первых n членов в сумме (10). Уравнение (5) удовлетворялось в отдельных точках дуги AC ($\sigma_m = m\pi/(2n)$, $m = \overline{1, n-1}$). Для выполнения условия (2) в точках $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_n = \pi/2$ использовались равенства (16) и (17). В точке отрыва либо удовлетворялось условие (26), чему соответствует длина смоченной части оболочки $L_C = L_0$, либо величина L_C задавалась.

Получаемая при этом система $n+4$ нелинейных уравнений (совместно с равенствами (21), (24)) относительно параметров λ , θ_A , α , B_1 , c_{2m+1} ($m = \overline{1, n}$) решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Координаты точек границы и внутренних точек потока определялись численным интегрированием (18).

При решении исследовано поведение безразмерных параметров

$$- \text{натяжения } T^* = \frac{4T}{\rho V_0^2 l \mu} = \frac{2R_0}{l};$$

- высоты оболочечной конструкции

$$H^* = \frac{H}{l} = \begin{cases} \min Y(\sigma)/l, & \theta_C < 0; \\ (R_0 + Y_0)/l, & \theta_C \geq 0; \end{cases}$$

- коэффициентов давления

$$C_x = \frac{2}{\rho V_0^2 l} \operatorname{Im} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ =$$

$$= \frac{\Phi^*}{\lambda} (\cos \theta_A - \cos \theta_B),$$

$$C_y = \frac{2}{\rho V_0^2 l} \operatorname{Re} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ =$$

$$= \frac{\Phi^*}{\lambda} (\sin \theta_A - \sin \theta_B) + \mu.$$

Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов [3, 4], полученных при различных числах точек коллокаций n . Результаты фильтрации изображены на рис. 5, 6, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа точек коллокаций n , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра $\delta = |\Delta u/u|$.

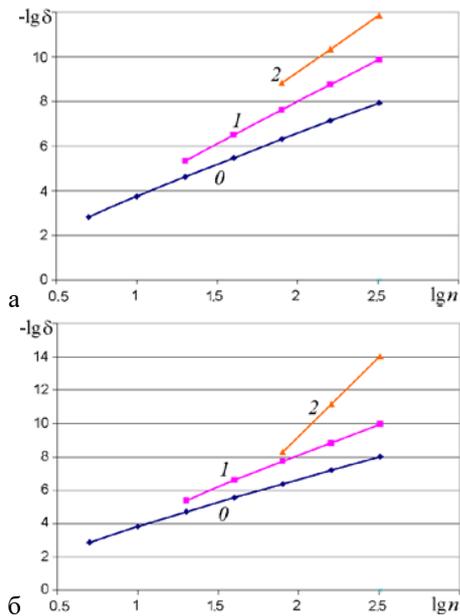


Рис. 5. Оценка погрешности параметров для $\mu=1$: а – C_x ; б – C_y

Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2, ... – результаты 1-й 2-й и т.д. фильтрации. Эти результаты показывают, что для приведенных вариантов параметр C_x определяется с

относительной погрешностью около 10^{-12} , параметр C_y около 10^{-14} , параметры T^* и H^* около 10^{-15} .

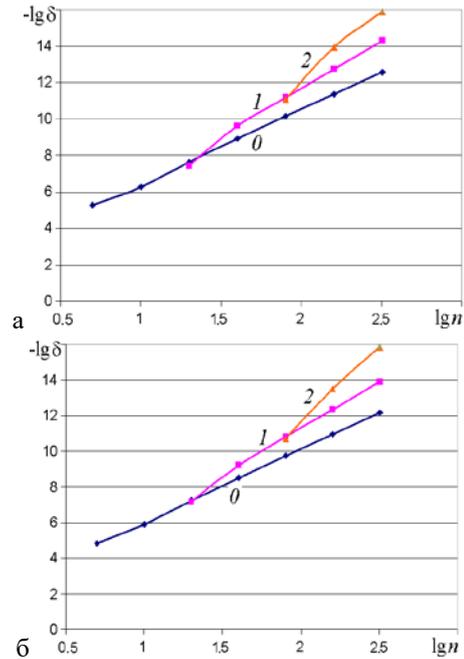


Рис. 6. Оценка погрешности параметров для $\mu=1$: а – T^* ; б – H^*

Вычисленные значения для $\mu=1$: $C_x=0.261970292419$; $C_y=0.15166458963982$; $\theta_C=-0.628936246903$; $T^*=0.899705782714492$; $H^*=0.388376990588594$.

4. Численные результаты

На рис. 7, 8 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для $L/l=\pi/2$ от длины смоченной поверхности L_0 при $\mu=1$; 4; 16. Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия (26) ($L_C = L_0$), отмечено на графиках жирной точкой. Видно, что при $L_C = L_0$ зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма приближенно, поскольку точность передачи графической информации обычно ограничивается двумя знаками (0.01) от диапазона исследования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$, то при определении y_0 с точностью 0.01, значение x_0 определяется примерно до 0.1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна более высокая точность и другая форма графического представления.

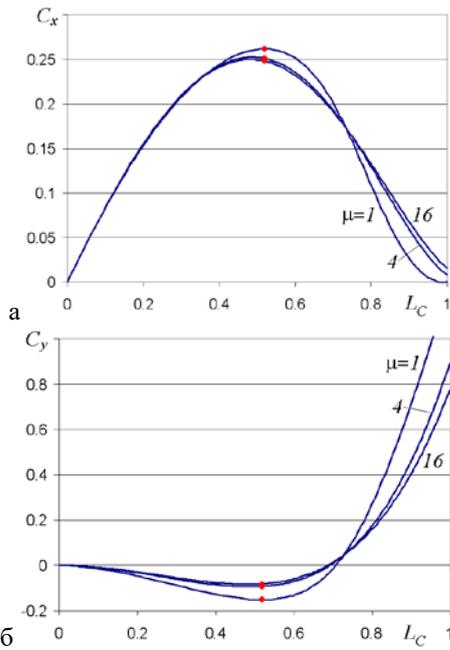


Рис. 7. Зависимости параметров от L_C :
а – C_x ; б – C_y

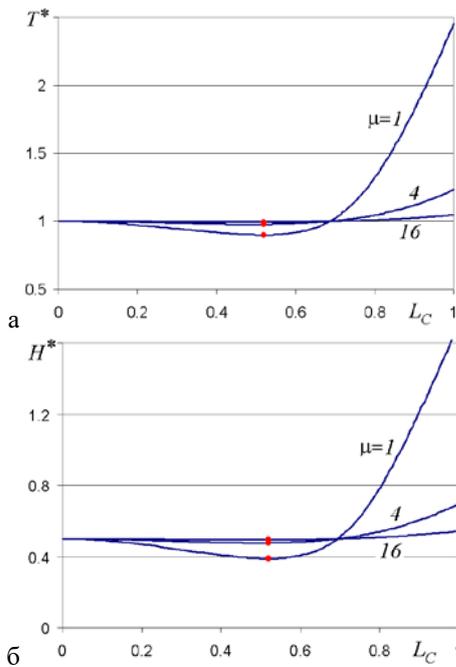


Рис. 8. Зависимости параметров от L_C :
а – T^* ; б – H^*

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} . Согласно этому, выберем шаг по параметру θ_C равным 10^{-6} и рассмотрим разности $\Delta u = u - u_0$ в зависимости от $\Delta\theta_C = \theta_C - \theta_{C0}$, где u_0 , θ_{C0} – значения параметра u и θ_C при выполнении (26).

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 9 – 10. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна 10^{-6} , по оси ординат – 10^{-12} . На точные графики зависимостей нанесен график функции $f(x) \approx kx^2$ с подобранными коэффициентами k . Как показывают графики, положение экстремума с высокой точностью совпадает с θ_{C0} .

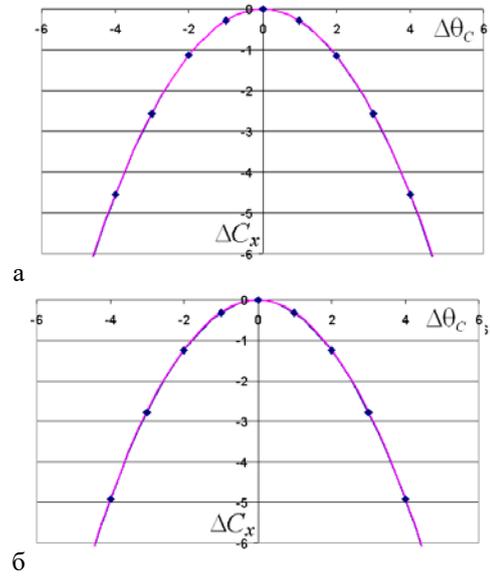


Рис. 9. Зависимости приращения параметра C_x :
а – для $\mu=1$; б – для $\mu=2$

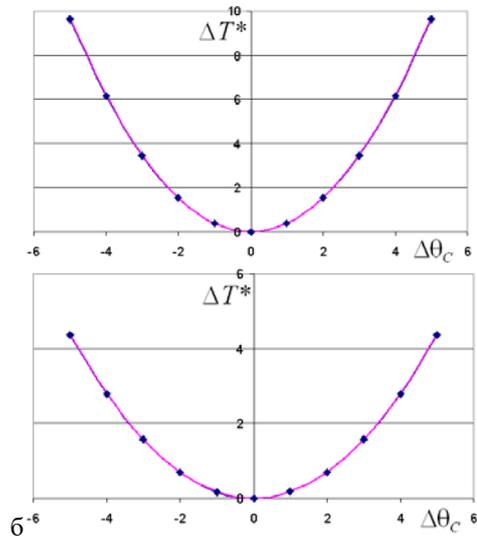


Рис. 10. Зависимости приращения параметра T^* :
а – $\mu=1$, б – $\mu=2$

На рис 11, 12 показаны зависимости параметров от $\log_2(\mu)$ при выполнении условия Бриллюэна – Вилла.

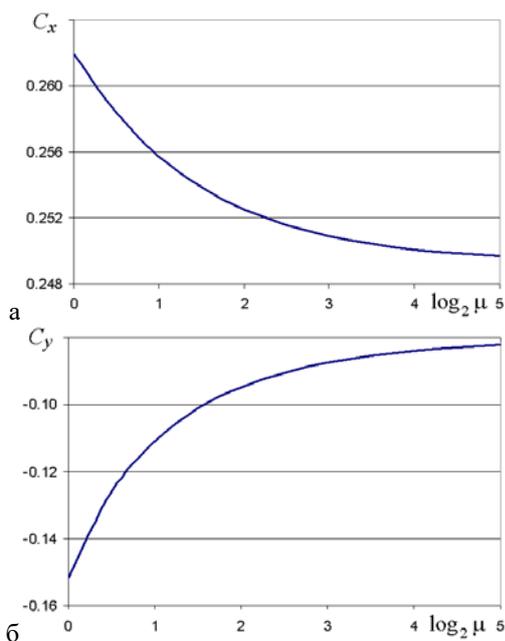


Рис. 11. Зависимости параметров от $\log_2(\mu)$:
а – C_x ; б – C_y

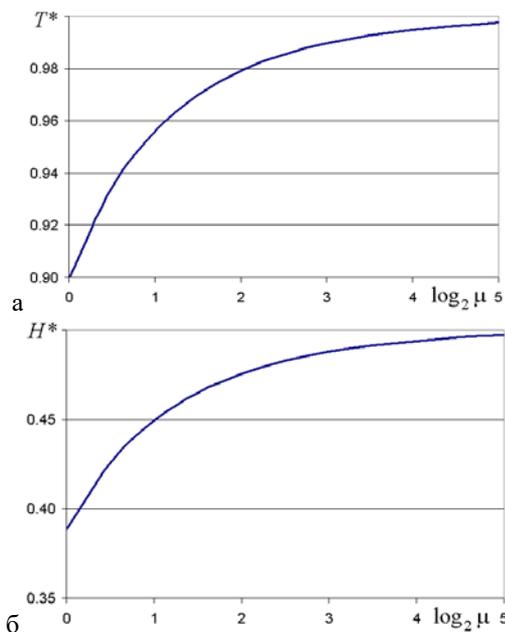


Рис. 12. Зависимости параметров от $\log_2(\mu)$:
а – T^* ; б – H^*

4. Заключение

В данной работе с помощью видеоизмененного метода Леви-Чивиты проведено численное решение задачи об отрывном обтекании оболочки.

Исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Применение технологии фильтрации численных результатов позволило установить этот факт с высокой точностью.

Благодарности

Авторы благодарят РФФИ за содействие в проведении работы. Работа поддержана грантом РФФИ 17-07-00356.

Список используемых источников

1. Галина И.Л. Истечение струи из канала с гибким ограждением // Прикл. матем. и мех. 1979. Т.43. №1. С.91–98.
2. Житников В.П., Житникова Н.И., Поречный С.С. Экстремальные свойства гидродинамических характеристик отрывного обтекания гибкой воздухоопорной оболочки вблизи экрана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб, 2013. 2(169). С. 55–62.
3. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // СПб. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(80). С. 105–110.
4. Многокомпонентный анализ численных результатов. /В.П. Житников, Н.М. Шерыхалина — Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 389 с.
5. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич — М.: Наука, 1979. — 536 с.