

Об одной схеме фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости в задаче электрохимической обработки металлов

Н.М. Миназетдинов

Институт информационных систем и инженерно-компьютерных технологий
Российский новый университет
Москва, Россия
e-mail: nminazetdinov@yandex.ru

Аннотация¹

В рамках модели «идеального процесса» электрохимической обработки металлов находится численно-аналитическое решение нелинейной двумерной задачи, связанной с определением формы поверхности детали при её обработке электродом-инструментом с вертикальными боковыми гранями, одна из которых является диэлектриком. Согласно гидродинамической интерпретации потенциального электрического поля в межэлектродном промежутке, решение задачи сводится к определению свободной поверхности двумерного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Представлены результаты расчетов для различных частных случаев.

Ключевые слова: обработка металлов; электрохимическая обработка металлов; нелинейные двумерные задачи; численные методы; аналитическое решение.

1. Введение

В основе электрохимической обработки металлов лежит явление электролиза. Основные законы этого явления сформулированы в 1834 году английским физиком М. Фарадеем [1].

В настоящее время метод электрохимической обработки претендует на лидирующее место в производстве деталей в высокотехнологических отраслях промышленности (точное приборостроение, медицинская техника, авиа-двигателестроение и др.) с повышенными требованиями к точности и качеству обработанной поверхности [2, 3, 4].

Вследствие отсутствия контакта электрода-инструмента (катод) с обрабатываемой заготовкой (анод) и высокой электропроводности электролитов растворение металла происходит не только в зоне, предназначенной для обработки, но и на прилегающих к ней участках поверхности детали, и форма обработанной поверхности не повторяет полностью профиль электрода-инструмента.

Проблема установления взаимосвязи между геометрией электрода-инструмента и обработанной поверхности является актуальной в теории электрохимической обработки, и существует необходимость разработки адекватных математических моделей и совершенствования методов расчета формы обрабатываемых.

В качестве первого приближения в теоретическом исследовании процесса используется модель идеального процесса, в которой предполагается, что свойства электролита постоянны во времени и в межэлектродном пространстве и не учитываются особенности электродных процессов. Принятые предположения позволяют экстраполировать закон Ома в области, непосредственно прилегающие к электродам, которые считаются эквипотенциальными поверхностями. Основные допущения модели и их обоснование приведены в работе [2].

Допущения и предпосылки модели идеального процесса позволяют свести задачи электрохимического формообразования к краевым задачам для аналитических функций [5, 6, 7].

2. Схема межэлектродного промежутка

Схема сечения межэлектродного промежутка представлена на рис. 1: здесь $CDEP$ – граница катода, участок CDE – его рабочая поверхность, EP – граница диэлектрического покрытия, выделенная на чертеже штриховкой, длина участка DE равна L . При соблюдении необходимых условий, после длительного времени обработки, поверхность принимает определённую, постоянную во времени форму, которую называют установившейся или

Труды Седьмой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-30 мая, Уфа-Ставрополь, Ханты-Мансийск, Россия, 2019

стационарной [2]. Линия $PABC$ соответствует установившейся границе анода.

Введём систему декартовых координат (x_1, y_1) , связанную с катодом, который совершает поступательное движение к аноду в направлении оси ординат с постоянной скоростью V_c . Начало координат выбрано в точке E . Точки P и C являются бесконечно удалёнными.

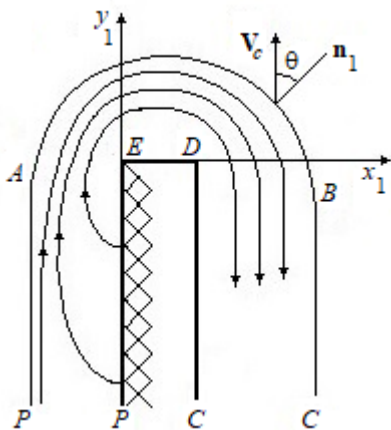


Рис. 1. Геометрия межэлектродного промежутка

3. Модель процесса электрохимической обработки

Согласно модели идеального процесса [2], электрическое поле с потенциалом u в межэлектродном промежутке описывается уравнением Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

Функцию $u(x_1, y_1)$ будем считать мнимой частью аналитической функции $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$. Функция $W_1(z_1)$ - комплексный потенциал электрического поля, её действительная часть $v(x_1, y_1)$ - функция тока. Значения потенциалов u_a и u_c на поверхностях анода $PABC$ и рабочей части CDE катода постоянны. На границе диэлектрика EP выполняется условие

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = 0. \quad (2)$$

На основе анализа электродных процессов было показано [2], что при малых значениях анодной плотности тока j_a значение η выхода по току для реакций анодного растворения металла в электролитах, являющихся водными растворами нитрата или хлората натрия, практически равно нулю.

В результате анодной активации металла под действием анионов этих солей, при некоторой критической плотности тока j_a начинается увеличение η при возрастании j_a . Для указанных

электролитов зависимость $\eta(j_a)$ при обработке сталей можно представить в виде [9]

$$\eta(j_a) = \begin{cases} 0, & j_a \leq j_{cr}, \\ a_0 + \frac{a_1}{j_a}, & j_a > j_{cr}. \end{cases} \quad (3)$$

где $a_0 > 0, a_1 < 0, j_{cr}$ - постоянные.

На установившейся анодной границе выделим три участка с разными законами распределения анодной плотности тока.

Будем считать, что на участке AB анодной границы выполняются условия $j_{cr} < j_a \leq j_{max}$, $0 < \eta \leq \eta_{max}$ (рис. 2), а установившееся распределение плотности тока j_a удовлетворяет условию [8]

$$\eta(j_a) j_a = j_0 \cos \theta, \quad j_0 = \rho V_c / \varepsilon, \quad (4)$$

где ε - электрохимический эквивалент металла; ρ - плотность материала анода; θ - угол между вектором V_c скорости подачи катода и вектором n_1 нормали к анодной границе (рис. 1). Согласно формулам (3) и (4), распределение нормальной производной потенциала на этом участке анодной границе удовлетворяет условию [9]

$$\left| \frac{dW_1}{dz_1} \right| = \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0} (-a_1 + j_0 \cos \theta), \quad (5)$$

где κ - удельная электропроводность среды.

В областях, моделируемых вертикальными прямолинейными участками PA и BC , из-за увеличения межэлектродного зазора происходит падение плотности тока, и растворение металла не происходит. Плотность тока на участке BC монотонно убывает от значения j_{cr} в точке B до величины j_{min} в точке C , а на участке AP монотонно убывает от значения в j_{cr} точке A до нуля в точке P (рис. 1). Положения точек A и B неизвестны и определяются в процессе решения.

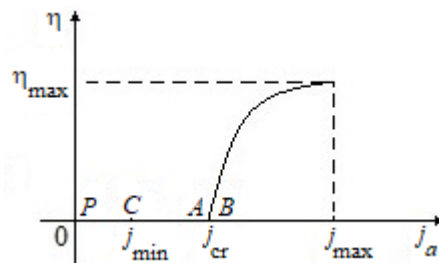


Рис. 2. График зависимости $\eta(j_a)$

Принимая за характерный размер величину $H = \kappa(u_a - u_c) / j_0$ [8], имеющую размерность длины введём безразмерную переменную $z = z_1 / H$. Используя формулу $W(t) = (W_1(t) - iu_c) / (u_a - u_c)$,

введём безразмерный комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Безразмерный потенциал ψ удовлетворяет условиям на границах

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{AB} = a + b \cos \theta, \quad a = -\frac{a_1}{a_0 j_0}, \quad b = \frac{1}{a_0}, \quad (6)$$

$$\psi|_{PABC} = 1, \quad \psi|_{CDE} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{EP} = 0. \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = \frac{j_{\min}}{j_0} = j_c, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_P = 0. \quad (9)$$

Согласно гидродинамической аналогии [7, 10], двумерное потенциальное электрическое поле моделируется фиктивным плоскопараллельным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости. При этом потенциалу электрического поля ставится в соответствие функция тока фиктивного течения, а функции тока соответствует потенциал скорости.

Гидродинамическим аналогом напряжённости \mathbf{E} электрического поля является скорость \mathbf{V} фиктивного плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости. Вдоль линии тока $\psi = \text{const}$ указанного течения выполняется равенство $\partial \psi / \partial n = V$, где $V = |\mathbf{V}|$ [8].

Тогда, согласно равенству (6), на участке AB установившейся анодной границы, безразмерная скорость фиктивного течения изменяется по закону

$$V = a + b \cos \theta, \quad (10)$$

где θ – аргумент вектора скорости.

Задаче определения формы анодной границы при её гидродинамической интерпретации соответствует двумерная задача теории струй идеальной несжимаемой жидкости по определению свободной поверхности AB с заданным законом изменения скорости (10) на ней.

Поток создаётся системой непрерывно распределённых источников вдоль линии EP и стока в бесконечно удалённой точке C . В точке A происходит отрыв потока с полубесконечной пластины AP , затем в точке B граница свободной поверхности AB замыкается на полубесконечную пластину BC . Схема расположения линий тока фиктивного течения представлена на рис. 1.

Для решения задачи введем вспомогательное комплексное переменное $t = \xi + i\delta$, изменяющееся в области G_t ($|t| < 1, \delta > 0$) (рис. 3) и будем искать функцию $z(t)$, конформно отображающую полукруг

G_t единичного радиуса на область течения в плоскости переменной z . Соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами на рис. 1, 3.

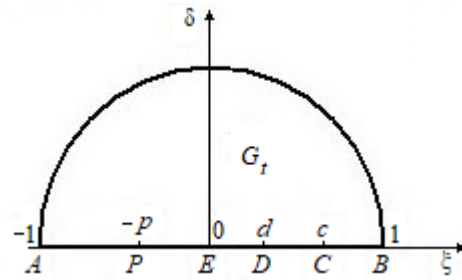


Рис. 3. Плоскость параметрической переменной t

Решение сводится к определению комплексного потенциала $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ и функции Жуковского [11, 12]

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{V_0 dz}{dW} \right) = r + i\theta, \quad r = \ln \frac{V_0}{V}, \quad (11)$$

связанную с функциями $W(t)$ и $\chi(t)$ соотношением

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dt} \exp(\chi(t)), \quad (12)$$

V – модуль скорости фиктивного течения, V_0 – характерное значение V . Будем считать, что $V_0 = a$.

Согласно условиям (7), комплексный потенциал $W(t)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \\ 1, & t = \xi, \quad \xi \in [-1, -p] \cup (c, 1], \\ 0, & t = \xi, \quad \xi \in [0, c], \end{cases} \quad (13)$$

где σ – полярный угол в плоскости параметрической переменной t .

Из условия (8) следует, что на границе диэлектрического покрытия EP , функция $\varphi(t)$ постоянна. Не нарушая общности, будем считать, что

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \xi \in [-p, 0], \quad (14)$$

Область G_w изменения комплексного потенциала представлена на рис. 4.

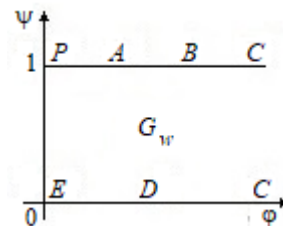


Рис. 4. Плоскость комплексного потенциала W

Используя конформные отображения [10], получим соотношение устанавливающее связь параметрической переменной t с комплексным потенциалом W фиктивного течения.

Отобразим область G_t (рис.3) на верхнюю полуплоскость G_u (рис. 5) преобразованием [10]

$$u = -\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (15)$$

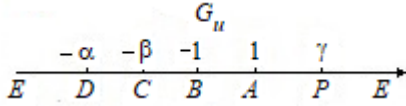


Рис. 5. Плоскость параметрической переменной u

Затем, используя формулу Кристоффеля-Шварца [10], найдем производную функции, отображающей область G_u на область изменения комплексного потенциала

$$\frac{dW}{du} = \frac{N}{(u+\beta)\sqrt{(u-\gamma)}}. \quad (16)$$

где $\beta = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right)$, $\gamma = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$, N – постоянная величина.

Используя формулы (15) и (16), получим

$$\frac{dW}{dt} = M \frac{1-t^2}{(t-c)(1-tc)\sqrt{t(t+p)(1+tp)}}. \quad (17)$$

Интегрированием выражения (16) по дуге окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $t = C$ с помощью теории вычетов [7], найдём

$$M = -\frac{\sqrt{c(c+p)(1+pc)}}{\pi}. \quad (18)$$

Представим функцию Жуковского в виде суммы [11]

$$\chi(t) = \chi_*(t) + \omega(t), \quad (19)$$

где $\chi_*(t)$ – функция Жуковского для течения по заданной (рис. 1а) с условием $V = V_0$ на границе AB , а $\omega(t)$ – аналитическая в G_t и непрерывная в \bar{G}_t функция. На границе области G_t функции $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} V_0 \exp(-r(t)) &= a(b + \cos \theta(t)), \\ \operatorname{Re} \chi_*(t) &= 0, \quad t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\operatorname{Im} \chi_*(\xi) = \operatorname{Im} \chi(\xi) = \begin{cases} \pi/2, & \xi \in [-1, -p) \\ \pi, & \xi \in (-p, 0), \\ 0, & \xi \in (0, d), \\ -\pi/2, & \xi \in (d, 1]. \end{cases} \quad (21)$$

Из условий (9) следует, что безразмерные значения скоростей в бесконечно удаленных точках C и P удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} V_C &= V_0 \exp(-r(c)) = j_c, \\ V_P &= V_0 \exp(-r(-p)) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно условиям (13) и первому из равенств (22), безразмерная ширина h межэлектродного зазора на бесконечности в сечении CC равна

$$h = V_C^{-1}. \quad (23)$$

В точке A отрыва потока с полубесконечной пластины AP выполняется условие гладкого отрыва Бриллюэны – Вилла [11], которое можно представить в виде равенства [13]

$$d\theta/d\sigma = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \pi. \quad (24)$$

Для построения функции $\chi_*(t)$ рассмотрим функцию $F(t) = t d\chi_*/dt$. Согласно граничным условиям (20)-(21), используя принцип симметрии Шварца [10], функцию $F(t)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость изменения переменной t .

Функция $F(t)$ имеет логарифмические особенности в точках E ($t = 0$), D ($t = d$), P ($t = -p$). Используя метод особых точек Чаплыгина [11, 12], построим функцию $F(t)$ и, интегрируя ее, получим

$$\chi_*(t) = \ln \left(t \left(\frac{(t-d)(1+tp)}{(t+p)(1-td)} \right)^{1/2} \right) - \frac{\pi}{2} i. \quad (25)$$

Учитывая равенство (19) и граничные условия (20), (21) для функции $\omega(t)$ получим нелинейную краевую задачу

$$\operatorname{Im} \omega(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad \operatorname{Re} \omega(1) = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} V_0 \exp(-v(\sigma)) &= \\ &= a + b \cos(\theta_*(\sigma) + \mu(\sigma)), \quad \sigma \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \theta_*(\sigma) &= \operatorname{Im} \chi_*(\exp(i\sigma)), & v(\sigma) &= \operatorname{Re} \omega(\exp(i\sigma)), \\ \mu(\sigma) &= \operatorname{Im} \omega(\exp(i\sigma)). \end{aligned}$$

Функция $\omega(t)$, в силу условий (26), разлагается в степенной ряд с вещественными коэффициентами (всюду далее суммирование ведется от $k=1$ до $k=\infty$)

$$\omega(t) = c_0 + \sum c_k t^k, \quad c_0 = -\sum c_k. \quad (28)$$

Из формул (12), (17)-(19), (25), (28) будем иметь равенство

$$\frac{dz}{dt} = i \frac{\sqrt{c(c+p)(1+pc)}}{\pi V_0} F(t) \exp(\omega(t)), \quad (28)$$

здесь

$$F(t) = \frac{1-t^2}{(t-c)(1-tc)(t+p)} \sqrt{\frac{t(t-d)}{1-td}}$$

Интегрированием равенства (28) по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $t=c$ с помощью теории вычетов [10] найдем величину h межэлектродного зазора между линиями BC и CD

$$h = \frac{c}{V_0} \sqrt{\frac{(1+pc)(c-d)}{(1-cd)(c+p)}} \exp(\omega(c)). \quad (29)$$

Аналогично, интегрированием равенства (28) по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $t=-p$ найдем расстояние между линиями AP и EP

$$h_p = \frac{1-c^2}{V_0} \sqrt{\frac{cp(p+d)}{(c+p)(1+pc)(1+pd)}} \exp(\omega(-p)). \quad (30)$$

Интегрируя равенство (28) на отрезке $[0, d]$, найдем длину L отрезка ED

$$L = \frac{\sqrt{c(c+p)(1+pc)}}{\pi V_0} \int_0^d F_1(x) \exp(\omega(x)) dx, \quad (31)$$

$$F_1(x) = \frac{1-x^2}{(c-x)(1-xc)(x+p)} \sqrt{\frac{x(d-x)}{1-xd}}$$

Используя формулы (19), (25) и (28) из условия (24) получаем

$$p = \frac{R-1}{R+1}, \quad R = \frac{1-d}{1+d} + 2 \left(1 + \sum c_k (-1)^k k \right) \quad (32)$$

Для численного решения задаются геометрические величины h , L , коэффициенты a_0 , a_1 , характеризующие свойства электролита, и характерная плотность тока j_0 .

Коэффициенты разложения (28) определяются таким образом, чтобы на искомой границе катода удовлетворялось условие (27). Численно задача решается методом коллокаций. Для этого в разложении (28) сохраняется конечное число слагаемых, а уравнение (28) выполняется в N дискретных точках. Система уравнений для вычисления коэффициентов разложения (28) совместно с уравнениями (29), (31), (32), предназначенных для определения математических параметров c , d , p решается методом Ньютона.

3. Результаты расчетов

При

$$a_0 = 0.906, \quad a_1 = -12.82, \quad j_0 = 100 \text{ А/см}^2 \quad (33)$$

и безразмерной толщине катода $L=0.5$ выполнен расчет координат точек анодной границы при трех различных значениях безразмерного зазора h : 0.6; 0.7; 0.8.

Графики анодных границ представлены на рис.6. Безразмерная величина h_p для трех указанных случаев не меняется и равна 0.322.

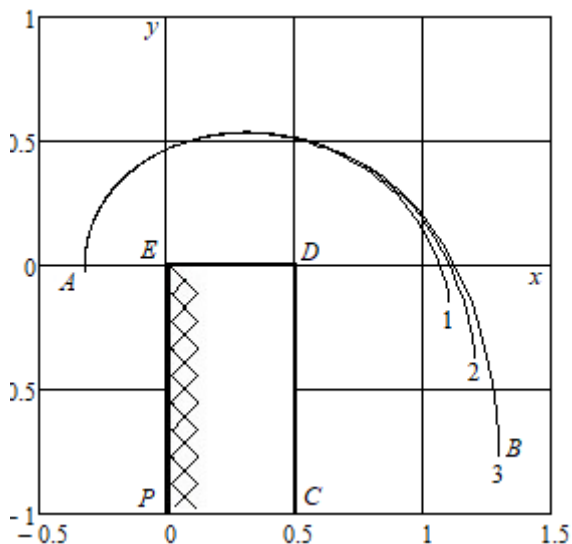


Рис. 6. Графики анодных границ
1 – $h=0.6$; 2 – $h=0.7$; 3 – $h=0.8$

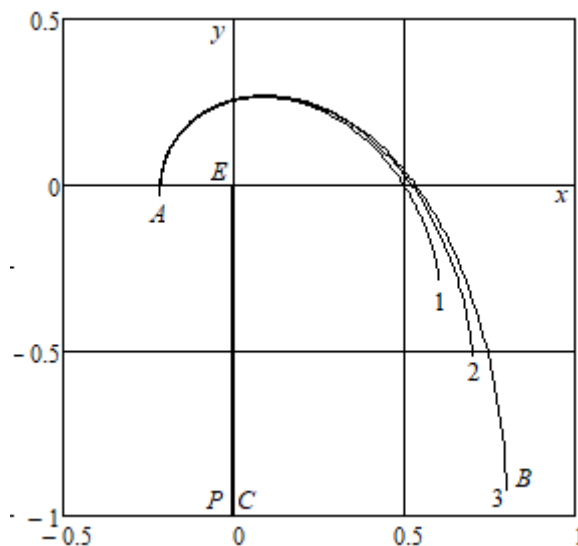


Рис. 7. Графики анодных границ
1 – $h=0.6$; 2 – $h=0.7$; 3 – $h=0.8$

На рис. 7 изображены графики анодных границ при выполнении условий (33) для случая, когда толщина катода-инструмента пренебрежимо мала, т.е. $L=0$.

Расчеты выполнены для следующих значений безразмерного зазора h : 0.6; 0.7; 0.8.

При значениях $a_0 = 0.906$, $a_1 = -12.82$, $j_0 = 100 \text{ А/см}^2$, $h = 0.8$ вычислены координаты точек анодной границы для трех значений толщины катода L : 0.2; 0.4; 0.6. Результаты расчетов анодных границ представлены на рис. 8.

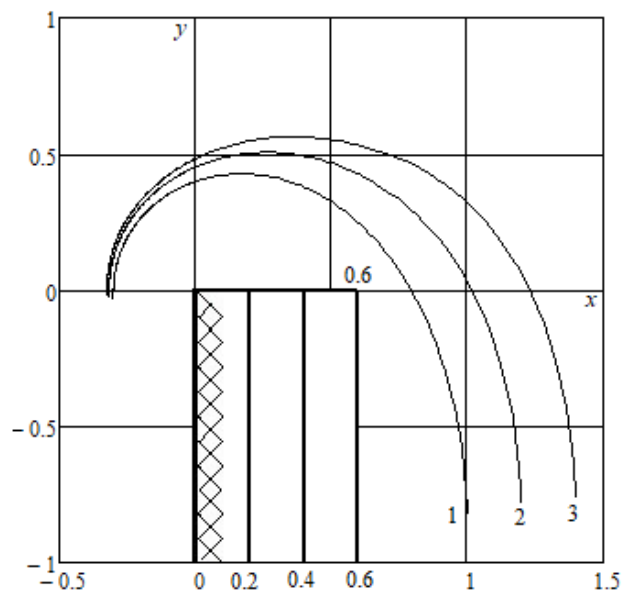


Рис. 8. Графики анодных границ
1 – $L=0.2$; 2 – $L = 0.4$; 3 – $L = 0.8$

Список используемых источников

1. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М: Наука, 1990. – 624 с.
2. Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А.Д. Давыдов, Е. Козак. – М.: Наука, 1990. – 272с.
3. Импульсная электрохимическая размерная обработка / В.П. Житников, А.Н. Зайцев. – М.: Машиностроение, 2008, – 413 с.

4. Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A. P. Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proceeding of the seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). 2013. Vol. 6. P. 13–26.
5. Крылов А.Л. Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Докл. АН СССР. 1968. Т.178, №2. С. 321 – 323.
6. Крылов, А.Л., Шустер В.Г., Эйдельман Р.Д. О решении плоской стационарной задачи электрохимической обработки металла (задача Коши для уравнения Лапласа) // Электронная обработка материалов. – 1969. №3. С. 21 – 27.
7. Клоков В.В., Костерин А.В., Нужин М.Т. О применении обратных краевых задач в теории электрохимической размерной обработки // Труды семинара по краевым задачам. Казань. Изд-во Казан. ун – та. 1972. Вып. 9. С. 132 – 140.
8. Электрохимическое формообразование / В.В. Клоков - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. - 80 с.
9. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учётом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2004. Т.45, №4. С. 7-12.
10. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев., Б.В. Шабат.- М.: Наука, 1987. - 688 с.
11. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. -. М.: Наука, 1979. - 536с.
12. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости / О.М. Киселев, Л.М. Котляр. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 156 с.
13. Minazetdinov N. M. One problem of the theory of dimensional electrochemical machining of metals // Journal of applied mechanics and technical physics. 2009. Vol. 50. № 3. P. 540-545.