

Моделирование электрохимической обработки непрофилированным электродом – инструментом

Г.И. Федорова
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: g_fed@mail.ru

Г.Р. Максютова
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: g_fed@mail.ru

И.М. Гильметдинов
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: mrswad@mail.ru

К.О. Шерыхалин
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: konstantin-sherykhalin@yandex.ru

Аннотация¹

В работе решены и исследованы две задачи моделирования формообразования обрабатываемой поверхности при электрохимической обработке электродом-инструментом в виде прямого угла с изоляцией и без нее. Использована ступенчатая зависимость выхода по току от плотности тока при условии совпадения максимального и критического значений плотности тока. Найдены квазистационарные решения задач.

1. Введение

В [1–4] предложена модель квазистационарного электрохимического формообразования. Модель основана на использовании закона Фарадея, согласно которому скорость электрохимического растворения определяется по формуле

$$V_{есм} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \kappa\varepsilon/\rho,$$

где ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого материала; j – плотность тока на анодной границе; κ – электропроводность электролита; $\eta = \eta(j)$ – выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения).

Труды шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018

Для моделирования прецизионных процессов использовалась ступенчатая зависимость выхода по току [5]

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & j_n = j_1, \\ 0, & j_n < j_1. \end{cases} \quad (1)$$

В предельной модели, применяемой ниже, максимальная плотность тока $j_{\max} = j_1$. При этом на обрабатываемой поверхности образуются две зоны: в первой плотность тока постоянна, во второй растворение отсутствует.

Такая модель позволяет поставить задачи квазистационарного электрохимического формообразования и получить точные решения.

2. Обработка электродом-инструментом без изоляции

Рассмотрим задачу электрохимической обработки (ЭХО) угловым электродом-инструментом (ЭИ) ACB' с углом раствора равным $\pi/2$, который движется горизонтально вправо с постоянной скоростью V_{et} к заготовке, изначально имевшей два прямых угла (рис. 1,а). M – точка перегиба обрабатываемой поверхности. Рассматривается конечная фаза процесса (рис. 1,б). Предполагается выполнение закона Ома $j = \kappa|E|$, где E – напряженность электрического поля, κ – электропроводность электролита. При условии совпадения максимального и критического значений плотности тока решение нестационарной задачи является квазистационарным, т.е. решение в каждый момент времени может быть найдено независимо от других.

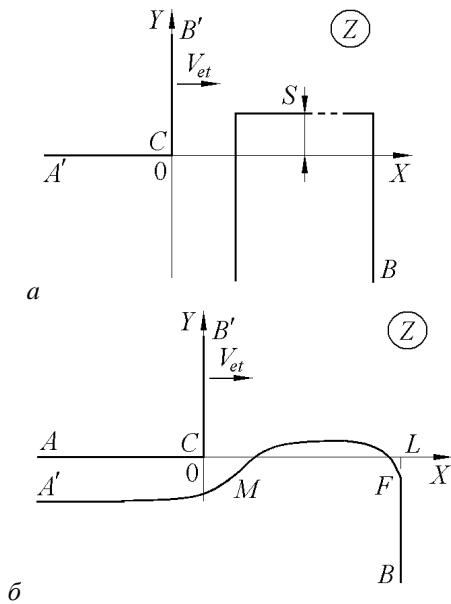


Рис. 1. Формы межэлектродного пространства на физической плоскости:
***a* – перед началом процесса; *б* – в конечной фазе обработки.**

***A MF* – зона постоянного (критического) значения напряженности; *FB* – нерастворяемая (прямолинейная) граница заготовки**

В известных решениях подобных задач ранее было подробно исследовано формообразование передней кромки [2, 4]. Формообразование задней кромки до сих пор не рассматривалось, но представляет не меньший интерес.

Электрическое поле считается потенциальным и соленоидальным. Поэтому для решения задачи применяются методы теории функций комплексного переменного. Пусть комплексная координата $Z=X+iY$. На плоскости комплексного потенциала $W=\Phi+i\Psi$ (Φ – потенциал электрического поля, Ψ – функция тока) образом МЭП является полоса шириной U , где U – разность потенциалов между электродами (рис. 2, *a*). Напряженность электрического поля $E = dW/dZ$. На поверхности эквипотенциальных электродов вектор E направлен перпендикулярно их поверхности (от ЭИ к обрабатываемой поверхности).

При использовании зависимости $\eta(j)$ (1) при $E_1=E_{\max}$ ($E_1 = j_1/\kappa$) на поверхности анода образуются две зоны с двумя типами краевых условий. Первой зоне $A MF$ с постоянным модулем напряженности $|E| = E_1$ на плоскости $\bar{E} = dW/dZ$ соответствуют дуги окружности радиуса E_1 с центром в начале координат, образующие разрез (рис. 2, *б*). Участку FB , где отсутствует растворение и угол между вектором напряженности и горизонтальной осью $\theta=-\pi$, на плоскости \bar{E} соответствует отрезок действительной оси FB .

На поверхности ЭИ $B'C$ угол $\theta=0$, на $A'C$ $\theta=-\pi/2$ (вектор напряженности направлен по нормали от ЭИ). Поэтому на плоскости годографа \bar{E} имеем лучи, направленные, соответственно, вправо от точки B и вверх от точки A .

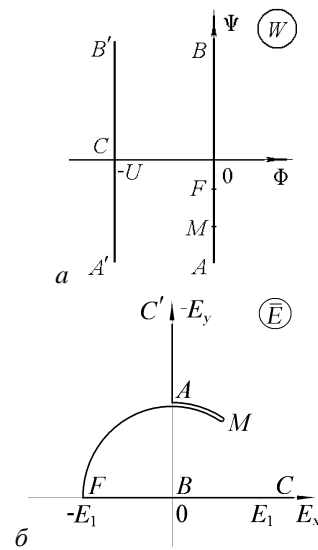


Рис. 2. Формы образа МЭП на плоскостях: *a* – комплексного потенциала; *б* – годографа

Применив преобразование Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{\bar{E}}{E_1} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{|E|}{E_1}, \quad (2)$$

получим фигуру, граница которой содержит только части прямых, т.е. многоугольник с углами A, M, F, B, C , равными соответственно, $\pi/2; 2\pi; \pi/2; 0; 0$ (рис. 3, *a*).

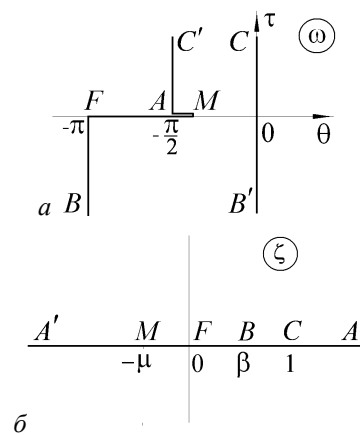


Рис. 3. Формы образа МЭП на плоскостях параметрического переменного:
***a* – плоскость ω ; *б* – плоскость ζ**

Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим конформное отображение верхней полуплоскости ζ (рис. 3, *б*) на этот многоугольник

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu) d\zeta}{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}} - \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Имеем

$$\frac{(\zeta + \mu)}{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)} = -\frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\zeta - \beta} + \frac{1 + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\zeta - 1},$$

$$\int \frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)\sqrt{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}.$$

Тем самым, согласно (3)

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = & -C_1 \frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\zeta - \beta}{(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta})^2} + \\ & + C_1 \frac{1 + \mu}{1 - \beta} \ln \frac{\zeta - 1}{(\sqrt{\zeta} + 1)^2} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку в соответствии с рис. 3,а

$$\operatorname{Re} \omega(\infty) = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = 0, \operatorname{Re} \omega(0) = -\pi,$$

$$\text{то } \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = C_1 \frac{1 + \mu}{1 - \beta} i\pi - \frac{\pi}{2} = 0, \quad C_1 \frac{1 + \mu}{1 - \beta} = -\frac{i}{2}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \omega(0) = -C_1 \frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi + C_1 \frac{1 + \mu}{1 - \beta} i\pi - \frac{\pi}{2} = -\pi,$$

$$-C_1 \frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} + C_1 \frac{1 + \mu}{1 - \beta} = \frac{i}{2}, \quad C_1 \frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -i, \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что

$$C_1 = -\frac{i(1 - \beta)}{2(1 + \mu)}, \quad (7)$$

$$-\frac{i(1 - \beta)}{2(1 + \mu)} \frac{\beta + \mu}{1 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -i, \quad \frac{1}{2} \frac{\beta + \mu}{1 + \mu} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1, \quad (8)$$

Тем самым, с учетом (7), (8), окончательно

$$\omega(\zeta) = i \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - \frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} - \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Согласно (2)

$$\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = E_1 e^{-i\omega} = iE_1 \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1}} \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}. \quad (10)$$

С учетом (10)

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega} dW = -i \frac{1}{E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}} \frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} dW d\zeta. \quad (11)$$

Теперь с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля найдем функцию $W(\zeta)$ и ее производную

$$W = -\frac{iU}{\pi} \ln(\zeta - \beta) - U, \quad \frac{dW}{d\zeta} = -\frac{iU}{\pi} \frac{1}{\zeta - \beta}. \quad (12)$$

Из (11) и (12)

$$dZ = -\frac{U}{\pi E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}} \frac{1}{(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta})^2} d\zeta. \quad (13)$$

Интегрируя (13) с помощью замены переменной

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}} \text{ от } \zeta = 1, \text{ получим функцию } Z[u(\zeta)]$$

$$\begin{aligned} Z(u) = & \frac{2U}{\pi E_1} \left[\ln \frac{u - 1}{u + 1} - i\pi + \frac{(1 - \gamma^2)u}{2(u^2 + \gamma)} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2 + 4\gamma - 1}{4i\sqrt{\gamma}} \left(\ln \frac{u - i\sqrt{\gamma}}{u + i\sqrt{\gamma}} + i\pi \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}}.$$

Параметр заглупления кромки ЭИ L определяется следующим образом

$$L = \frac{U}{E_1} \frac{\gamma^2 + 4\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad (15)$$

безразмерное время $\tau = \tau_0 - L \frac{E_1}{U}$. Величина L

зависит от отношения U/E_1 , равного асимптотическому расстоянию AA' , которое при расчетах принималось равным единице, и безразмерного параметра β . При этом величина μ , в

соответствии с (8), равна $\mu = \sqrt{\beta} \frac{2 - \sqrt{\beta}}{1 - 2\sqrt{\beta}}$. Согласно

этому соотношению при $1/4 < \beta < 1$ точка M перемещается на участок AC , а разрез на плоскости ω имеет вертикальное направление. Это значит, что при этом перегиб обрабатываемой поверхности и локальный максимум ординаты отсутствует, а на участке AC имеет место локальный минимум напряженности.

На рис. 4,а,б приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат (кривые 1, 2, 3, ..., 13 соответствуют $l=2; 1.98; 1.9; 1.8; 1.4; 1.0; 0.6; 0; -1; -2; -4; -6; -10$).

На обрабатываемой поверхности AF при $\beta \rightarrow 1$ образуется предельная форма, соответствующая решению гидродинамической задачи об истечении из-под щита [6] (рис. 4,а, кривая 13). На рис. 4,б при $\beta \rightarrow 0$ видно установление решения типа обтекания ограниченным потоком прямого угла (кривая 1).

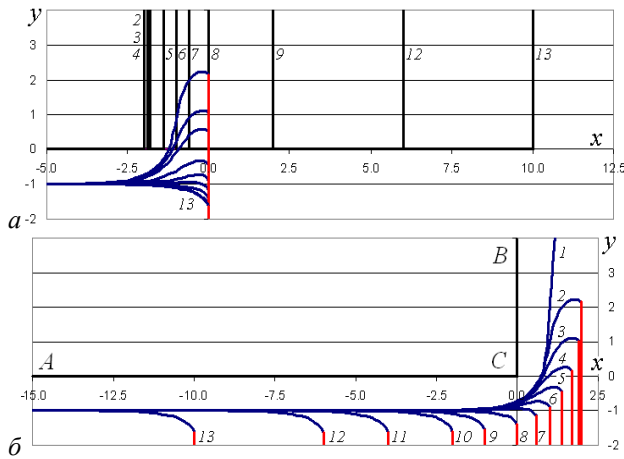


Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности:

a – в неподвижной системе координат;

б – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ

При $\beta \rightarrow 0$ решение представляется формулой

$$Z(u) = \frac{U}{\pi E_1} \left[\ln \frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{i} \ln \frac{u-i}{u+i} - i\pi + \pi \right]. \quad (16)$$

Необходимо заметить, что решение (16) не содержит вертикального участка FB , но в предельном решении (14) этот участок имеет место, и расположен на расстоянии $2U/E_1$ правее от угловой точки C .

Предельное при $\beta \rightarrow 1$ решение (истечение из-под щита) имеет вид

$$Z(u) = \frac{2U}{\pi E_1} \left[\ln \frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{u} - i\pi \right]. \quad (17)$$

На рис. 5 приведены зависимости $L(\beta)$ и зазора $S(L)$.

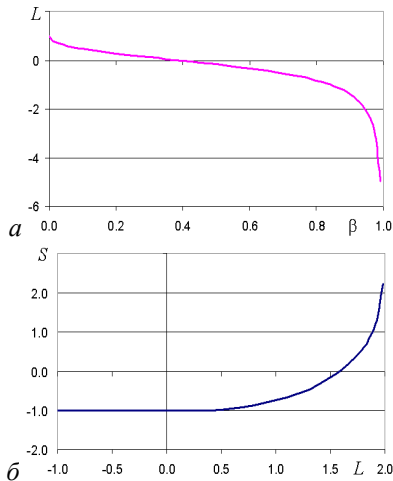


Рис. 5. Зависимости: *a* – $L(\beta)$; *б* – зазора $S(L)$

4. Обработка электродом-инструментом с изолированной передней поверхностью

Рассмотрим плоскую задачу ЭХО при использовании клиновидного ЭИ $A'CB'$ с углом раствора равным $\pi/2$,

с изолированной вертикальной поверхностью (рис. 6). ЭИ движется горизонтально вправо с постоянной скоростью V_{et} к заготовке, изначально имевшей два угла (рис. 6,*a*). Рассматривается конечная фаза процесса (рис. 6,*б*). M – точка перегиба обрабатываемой поверхности.

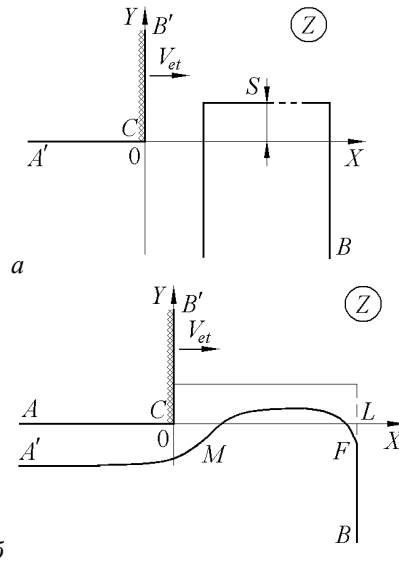


Рис. 6. Формы межэлектродного пространства на физической плоскости:

a – перед началом процесса; *б* – в конечной фазе обработки.

AMF – зона постоянного (критического) значения напряженности; FB – нерастворяемая (прямолинейная) граница заготовки

На плоскости комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ образом МЭП является полуполоса шириной U , где U – разность потенциалов между электродами (рис. 7,*a*).

При использовании зависимости $\eta(j)$ (1) при $E_1 = E_{\max}$ ($E_1 = j_1/\kappa$) на поверхности анода образуются две зоны с двумя типами краевых условий.

Первой зоне AMF с постоянным модулем напряженности на плоскости $\bar{E} = dW/dZ$ соответствуют дуги окружности радиуса E_1 с центром в начале координат, образующие разрез (рис. 7, *б*). Участку FB ($\theta = -\pi$), где отсутствует растворение, на плоскости \bar{E} соответствует отрезок действительной оси FB , как и в предыдущей задаче.

На поверхности ЭИ $B'C$ (линии тока) угол $\theta = \pi/2$, на $A'C$ $\theta = -\pi/2$ (вектор напряженности направлен по нормали от эквипотенциальной поверхности ЭИ и вдоль линии тока). Поэтому на плоскости годографа \bar{E} имеем лучи, направленные, соответственно, вниз от точки B и вверх от точки A . Область на плоскости годографа изображена на рис 7, *б*.

Применив преобразование Жуковского (2) получим многоугольник с углами A, M, F, B, C , равными соответственно, $\pi/2; 2\pi; \pi/2; 0; 0$ (рис. 8,а).

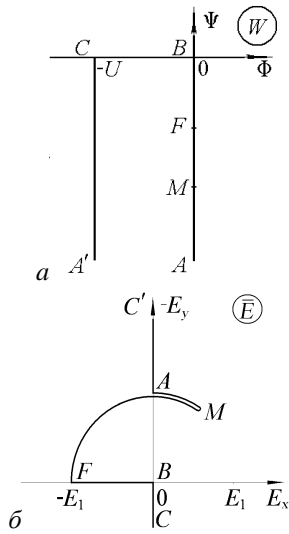


Рис. 7. Формы образа МЭП на плоскостях: а – комплексного потенциала; б – годографа

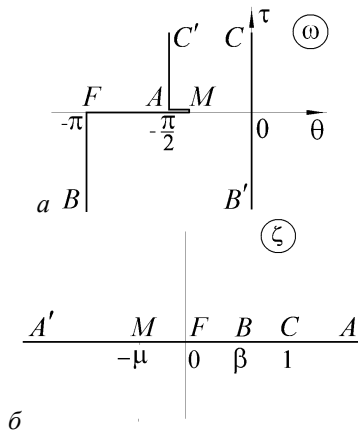


Рис. 8. Формы образа МЭП на плоскостях параметрического переменного: а – плоскость ω ; б – плоскость ζ

Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим конформное отображение верхней полуплоскости ζ (рис. 8,б) на этот многоугольник в виде (4).

Поскольку в соответствии с рис. 8,а

$$\operatorname{Re} \omega(\infty) = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} \omega(0) = -\pi,$$

$$\text{то } \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = C_1 \frac{1+\mu}{1-\beta} i\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, C_1 \frac{1+\mu}{1-\beta} = -i, \quad (18)$$

$$\operatorname{Re} \omega(0) = -C_1 \frac{\beta+\mu}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi + C_1 \frac{1+\mu}{1-\beta} i\pi - \frac{\pi}{2} = -\pi,$$

$$-C_1 \frac{\beta+\mu}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} + C_1 \frac{1+\mu}{1-\beta} = \frac{i}{2}, -C_1 \frac{\beta+\mu}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} - i = \frac{i}{2}, \quad (19)$$

Из (18), (19) следует, что

$$C_1 = -i \frac{1-\beta}{1+\mu}, \quad (20)$$

$$-i \frac{1-\beta}{1+\mu} \frac{\beta+\mu}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -\frac{3i}{2}, \frac{\beta+\mu}{1+\mu} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{3}{2}, \quad (21)$$

Тем самым, с учетом (20), (21), окончательно

$$\omega(\zeta) = \frac{3i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - i \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} - \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Согласно (22)

$$\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = E_1 e^{-i\omega} = iE_1 \frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} \right)^{3/2}. \quad (23)$$

С учетом (23)

$$dZ = -i \frac{U}{\pi E_1} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \right)^{3/2} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (24)$$

Теперь с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля найдем функцию $W(\zeta)$ и ее производную

$$W(\zeta) = i \frac{U}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1 - \sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} - 1},$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = -i \frac{U}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)}}. \quad (25)$$

Из (24) и (25)

$$dZ = -\frac{U}{\pi E_1} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{(\sqrt{\zeta} + 1)^2} \frac{(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta})^3}{(\zeta - \beta)^2} d\zeta. \quad (26)$$

Интегрируя (26) с помощью замены переменной

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}} \text{ от } \zeta=1, \text{ получим функцию } Z[u(\zeta)]$$

$$Z(u) = \frac{2U}{\pi E_1} \left[\gamma(\gamma+1)u + \left(\ln \frac{u-1}{u+1} - i\pi \right) + \frac{(\gamma-1)^2}{2} \frac{(\gamma+1)u}{u^2 + \gamma} + \frac{-3\gamma^3 - \gamma^2 + 5\gamma - 1}{4i\sqrt{\gamma}} \left(\ln \frac{u - i\sqrt{\gamma}}{u + i\sqrt{\gamma}} + i\pi \right) \right], \quad (27)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}}.$$

Параметр заглубления кромки ЭИ L определяется следующим образом

$$L = \frac{U}{E_1} \frac{-3\gamma^3 - \gamma^2 + 5\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad (27)$$

безразмерное время $\tau = \tau_0 - L \frac{E_1}{U}$. Величина L зависит от отношения U/E_1 , равного асимптотическому расстоянию AA' , которое при расчетах принималось равным единице, и безразмерного параметра β . При этом величина μ , в соответствии с (21), равна $\sqrt{\beta} \frac{3/2 - \sqrt{\beta}}{1 - 3\sqrt{\beta}/2}$. Согласно

этому соотношению при $4/9 < \beta < 1$ точка M перемещается на участок AC , а разрез на плоскости ω имеет вертикальное направление. Это значит, что при этом перегиб обрабатываемой поверхности и локальный максимум ординаты отсутствует, а на участке AC имеет место локальный минимум напряженности.

На рис. 9,а,б приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат (кривые 1, 2, 3, ..., 7 соответствуют $\beta=0.001; 0.02; 0.1; 0.2; 0.5; 0.9; 0.99$).

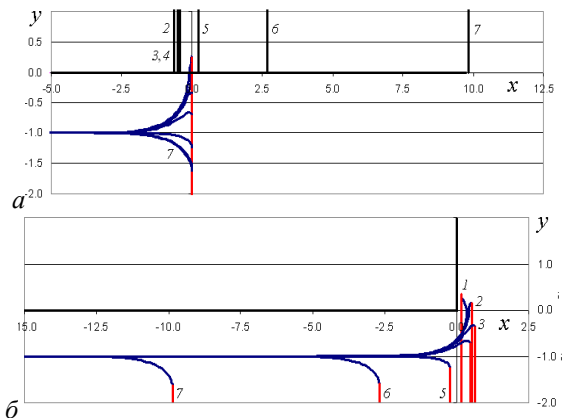


Рис. 9. Формы обрабатываемой поверхности:
а – в неподвижной системе координат;
б – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ

На обрабатываемой поверхности $A\mathcal{F}$ при $\beta \rightarrow 1$ образуется предельная форма, соответствующая решению гидродинамической задачи об истечении из-под щита (17) (рис. 9,а, кривая 7). На рис. 9,б при $\beta \rightarrow 0$ видно образование неоднолиственности (кривая 1).

На рис. 10 приведены зависимости $L(\beta)$ и зазора $S(L)$. Штрихом на рис. 10,б обозначена граница возникновения двулиственности на физической плоскости Z .

4. Заключение

В данной работе были решены и исследованы две задачи моделирования электрохимической обработки угловым электродом-инструментом заготовки, имеющей два прямых угла. Рассмотрена заключительная фаза формообразования задней кромки, когда на заготовке исчезает горизонтальный нерастворенный участок. Момент времени возникновения этой фазы зависит от величины

начального зазора между кромкой электрода-инструмента и верхней поверхностью заготовки. Однако дальнейшее развитие процесса квазистационарного формообразования во времени не зависит от начального зазора, а определяется только расстоянием от кромки электрода-инструмента до правого края заготовки.

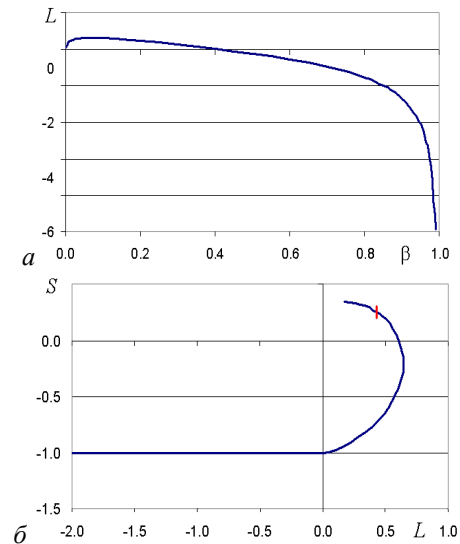


Рис. 10. Зависимости: а – $L(\beta)$; б – зазора $S(L)$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-07-00356).

Список используемых источников

1. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Известия вузов. Математика, 2011. №12. – С. 21-29.
2. Житников В.П., Зарипов А. А., Шерыхалина Н. М. Исследование нестационарного электрохимического формообразования с помощью квазистационарной модели // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, №3 (64). С. 80–86.
3. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Поречный С. С., Федорова Г. И. Предельная модель электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 4. С. 193–201.
4. Шерыхалина Н.М., Зарипов А.А., Поречный С.С. Предельно-квазистационарная модель электрохимического формообразования // Вестник ЮУрГУ, 2017. Т. 9, № 1. С. 65 – 71.
5. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. 2010. № 10. – С. 77-81.
6. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.