

Квазистационарная модель электрохимического формообразования вертикально движущейся пластиной

Н.И. Житникова
Факультет информатики и робототехники
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: zhitnikova_ni@mail.ru

С.С. Поречный
Общенаучный факультет
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа, Россия
e-mail: porechny@mail.ru

Аннотация¹

Сформулирована квазистационарная задача для моделирования процесса электрохимической резки пластинчатым электродом-инструментом. Постановка задачи основана на использовании ступенчатой функции выхода по току от плотности тока. При этом на обрабатываемой поверхности образуются три зоны с различными условиями. В области высоких плотностей тока используется обычное условие стационарности. В области малых плотностей тока растворение отсутствует и сохраняется начальная форма границ. В промежуточной зоне плотность тока в каждой точке равна критическому значению. Наличие краевых условий на каждом участке обрабатываемой поверхности позволяет сформулировать краевую задачу для аналитической функции комплексного переменного и найти форму границы в любой момент времени, независимо от предыстории. Проведено сравнение решений квазистационарной и нестационарной задач, и найден диапазон существования квазистационарного решения.

1. Введение

Задачи моделирования электрохимической обработки (ЭХО) решались многими авторами. Но при этом большее внимание уделялось исследованию стационарных решений [1–14]. Решение нестационарных задач позволяет определить многие дополнительные параметры, не описываемые стационарным решением, в том числе время установления стационарного процесса с заданной точностью. Однако потребность в вычислительных ресурсах для решения таких задач намного больше [15–22].

Труды Шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018

При моделировании многих процессов нестационарную задачу можно упростить с помощью квазистационарного приближения. В этом случае решение для каждого момента времени может быть найдено независимо от других, при этом исчезает необходимость измельчения шага по времени для сохранения точности и устойчивости. Но возникает необходимость исследования диапазона применимости квазистационарного приближения в рамках ограничения на величину погрешности.

В [23] был обоснован выбор ступенчатой зависимости выхода по току (доли тока, участвующего в реакции растворения металла) $\eta(j)$ от плотности тока j

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & j_n = j_1, \\ 0, & j_n < j_1. \end{cases} \quad (1)$$

при применении для моделирования процесса ЭХО закона Фарадея

$$V_{есм} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \kappa\varepsilon/\rho, \quad (2)$$

где ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого материала; j – плотность тока на анодной границе; κ – электропроводность электролита; j_1 – критическое значение плотности тока, ограничивающее зону растворения.

При применении модели (1), (2) квазистационарное приближение формируется заданием на участках с большой плотностью тока обычного условия стационарности, а на других – условия $j=j_1$ [24]. На участках, где $j < j_1$ растворение отсутствует, и сохраняется исходная форма заготовки. Приближение заключается в использовании условия стационарности, поскольку в реальности стационарное решение устанавливается асимптотически. Условие $j=j_1$ в нестационарных процессах выполняется динамически, когда выход по току скачком меняется от нуля до η_0 и наоборот, поэтому не приводит к неточности.

В данной работе применяется квазистационарная модель электрохимической резки вертикальным пластинчатым электродом-инструментом (ЭИ). Стационарная задача этого типа решена в [14].

Электрическое поле, как и в [14], считается потенциальным и соленоидальным. Поэтому для решения задач применяются методы теории функций комплексного переменного.

2. Постановка и решение квазистационарной задачи

Рассмотрим задачу формообразования обрабатываемой поверхности при обработке плоским полубесконечным ЭИ $A'CB'$, движущимся вертикально вниз с постоянной скоростью V_{et} . Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1,а. M – точка перегиба обрабатываемой поверхности. Образом МЭП на плоскости комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ (Φ – потенциал электрического поля, Ψ – функция тока) является полоса (рис. 1,б).

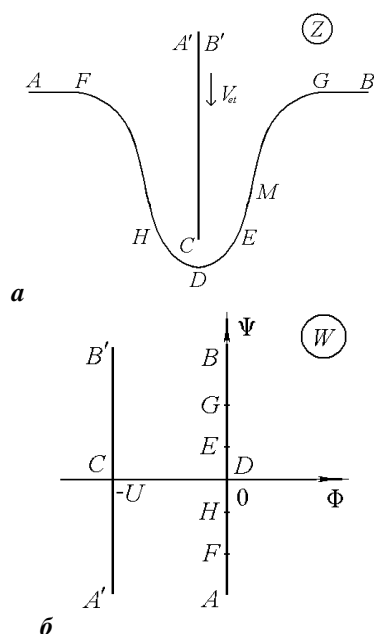


Рис. 1. Сечение МЭП:

а – физическая плоскость; б – плоскость комплексного потенциала;

HDE – зона активного растворения; DMG , FH – зоны постоянного (критического) значения напряженности; AF , GC – нерастворяемые (прямолинейные) границы

Изменение времени в данной постановке задачи связывается со сдвигом кромки ЭИ C в направлении к обрабатываемой поверхности. Это означает, что $L = V_{et}t$ представляет собой заглубление ЭИ под начальную поверхность.

Зависимость выхода по току от напряженности $|E| = j/\kappa$ моделируется ступенчатой функцией (1).

Как отмечалось в [23] на обрабатываемой поверхности образуются три зоны с тремя типами краевых условий. На горизонтальных участках AF и GB , где $|E| < E_1$, растворение отсутствует. Зона HDE , в которой напряженность за счет близости к ЭИ превышает E_1 , характеризуется условием стационарности. На плоскости годографа напряженности $\bar{E} = dW/dZ$, как и в стационарной задаче [14], этому участку соответствует дуга окружности радиуса $E_0/2$ с центром в точке $iE_0/2$ (рис. 2,а), где E_0 – напряженность в точке D . Переходному участку EMG (M – точка перегиба границы, соответствующей обрабатываемой поверхности соответствует дуга окружности радиуса $E_1 \leq E_0$ с центром в начале координат. Дуга EG может на плоскости \bar{E} содержать разрез, поскольку в отличие от задачи [14], данная граница не является стационарной. Однако участок границы DE не может иметь разреза на плоскости \bar{E} , потому что растворения не происходит и условие стационарности нарушается, если $|\bar{E}| < E_1$. Тем самым, отсутствие разреза на DE есть условие существования квазистационарного решения.

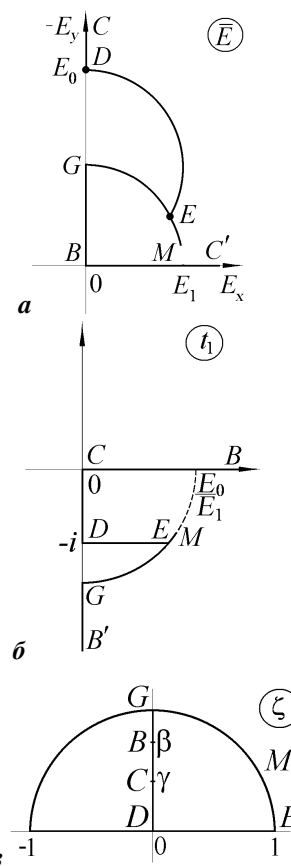


Рис. 2. Форма областей на различных плоскостях: а – плоскости годографа напряженности; б, в – параметрических плоскостях

Введем параметрические плоскости $t_1 = E_0/\sqrt{E}$ и ζ , области изменения которых показаны на рис. 2,б,в. Конформное отображение $t_1(\zeta)$ проще искать с помощью численного интегрирования производной

$$\frac{dt_1}{d\zeta} = \frac{1}{(\zeta^2 + \gamma^2)^{1/2}(\zeta^2 + \beta^2)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \zeta^{2m}, \quad (3)$$

поскольку на участках границы DE , DC и BG производная имеет чисто действительные значения, на участке BC – чисто мнимые.

Для получения отображения $W(\zeta)$ используем верхнюю полуплоскость t_2 (рис. 3)

$$t_2 = -\frac{1}{2} \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right), \quad (4)$$

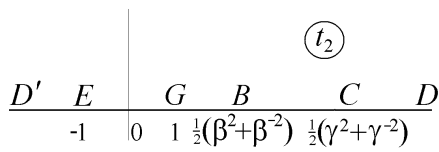


Рис. 3. Форма области на параметрической плоскости t_2

Функция $W(t_2)$ и производная $\frac{dW}{dt_2}(t_2)$ получаются с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля [25]

$$W(t_2) = -i \frac{U}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t_2 - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})} - \sqrt{\frac{1}{2}(\beta^2 + \beta^{-2})} - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})}{\sqrt{t_2 - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\beta^2 + \beta^{-2})} - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})}.$$

Тогда

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{2U}{\pi} \frac{1}{(\zeta^2 + \beta^2)(\zeta^2 + \beta^{-2}) \sqrt{(\zeta^2 + \gamma^2)(\zeta^2 + \gamma^{-2})}} \sqrt{2}(\zeta^4 - 1). \quad (5)$$

Расчет формы обрабатываемой поверхности производится с помощью численного интегрирования

$$Z(\zeta) = \frac{1}{E_0} \int_{i\gamma}^{\zeta} t_1(\zeta) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{E_0} W(\zeta) \int_{i\gamma}^{\zeta} \frac{dt_1}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{E_0} \int_{i\gamma}^{\zeta} W(\zeta) \frac{dt_1}{d\zeta} d\zeta. \quad (6)$$

Задача решается методом коллокаций, т.е. в сумме (3) сохраняется M слагаемых, а коэффициенты c_m определяются по условию $|t_1(p e^{i\sigma})| = \alpha = E_0/E_1$, заданному в дискретном множестве узловых точек $\sigma_m = m\pi/(2N)$. При этом функция $t_1(\zeta)$ вычисляется с помощью численного интегрирования (3) с условиями $t_1(i\gamma) = 0$, $t_1(0) = -i$, $\text{Re } t_1(i) = 0$.

Численные результаты приведены на рис. 4,а в сравнении с предельно-стационарным решением (кривая 1), полученным в [14]. Формы изображены в системе координат, связанной с движущимся ЭИ. Это позволяет более наглядно наблюдать установление предельно-стационарной формы в окрестности кромок ЭИ.

На рис. 4,б это же решение сравнивается с предельным решением, возникающим вблизи нерастворяемой части поверхности в неподвижной системе координат. Этим предельным решением является известная задача об истечении жидкости из-под щита [26] (кривая 2).

$$z = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{e^{\pi w/2} + \sqrt{e^{\pi w} + 1}} + \ln \left(e^{\pi w/2} + \sqrt{e^{\pi w} + 1} \right) \right) - \frac{2}{\pi},$$

$$z = \frac{Z}{S}, \quad w = \frac{W}{U},$$

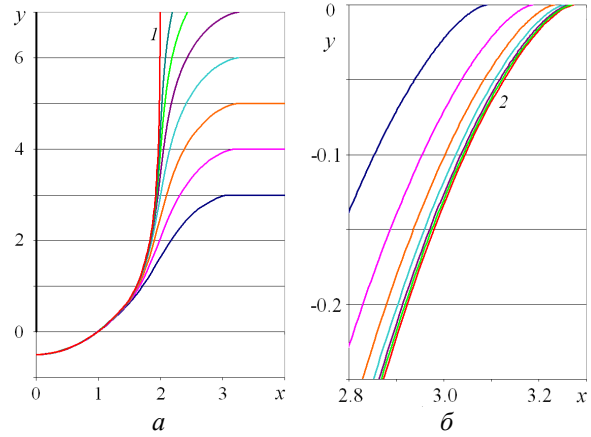


Рис. 4. Результаты расчетов для $\alpha = 2$: а – формы обрабатываемой поверхности; б – части поверхности вблизи нерастворенного участка

3. Сравнение с нестационарным решением

Нестационарная задача решалась методом, изложенным в [20, 21]. При этом на каждом временном шаге определялось конформное отображение полосы χ (параметрического переменного) на физическую плоскость Z , а также частная производная $\frac{\partial Z}{\partial \tau}(\zeta, \tau)$ координат точек области по безразмерному времени τ для определения сдвига границы.

На рис. 5,а приведены формы нестационарной поверхности в неподвижной системе координат. Шаг по безразмерному времени равен 1. При принятом способе обезразмеривания безразмерная скорость ЭИ равна 1. На рис. 5,б приведены образы этих кривых. Видно формирование квазистационарного процесса (рис. 2,а)

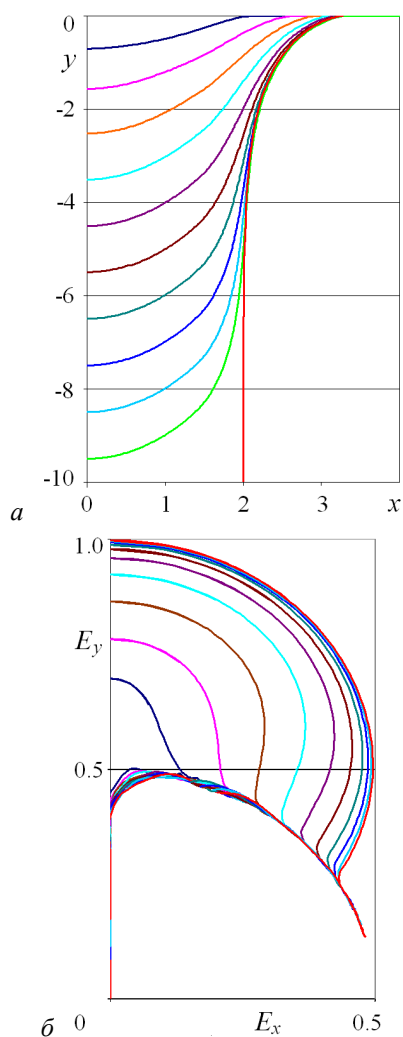


Рис. 5. Результаты расчетов: а – формы обрабатываемой поверхности; б – образы обрабатываемой поверхности на плоскости годографа напряженности

4. Об оценке погрешности

Было установлено, что погрешность формы при решении нестационарной задачи наиболее велика вблизи зоны отсутствия растворения. На рис. 6 приведены формы поверхности в окрестности точки G в сравнении с решением задачи об истечении жидкости из-под щита (кривая I). Видно, что при числе узлов сетки $N=144$ абсолютная погрешность превышает 0.1, а при $N=729$ уменьшается примерно до 0.02 (относительная погрешность на порядок меньше).

При решении дифференциальных уравнений с разрывной правой частью возникают вопросы о порядке точности метода. Для оценки погрешности применялась фильтрация результатов, полученных для различных $\Delta\tau$ и n , описанная в [27, 28].

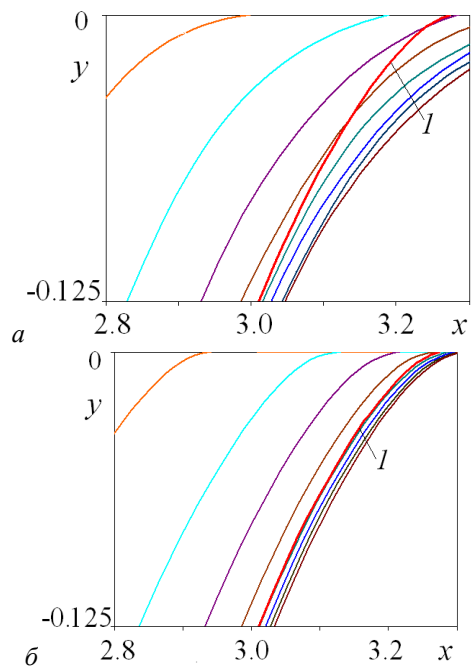


Рис. 6. Часть поверхности вблизи нерастворимой зоны: а – $N = 144$; б – $N = 729$

Было проведено исследование погрешностей с помощью фильтрации численных данных, полученных для $L=5$, $n=144, 216, 324, 486, 729$ и $\Delta\tau = (1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125) \cdot 10^{-3}$. В качестве величины, характеризующей погрешность, была использована ордината нестационарной поверхности в точке G (в которой ордината квазистационарной поверхности равна нулю). Результаты фильтрации численных данных, полученных для различных $\Delta\tau$ для $n=729$, показаны на рис. 7,а. По оси ординат отложены десятичные логарифмы относительных погрешностей со знаком «минус». По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы отношений безразмерного шага по времени $\Delta\tau$ к $\Delta\tau_0 = 0.01$. Сплошными линиями показаны результаты фильтрации разностей данных, соответствующих последовательным значениям $\Delta\tau$. Результаты выбора эталона, равного $1.6 \cdot 10^{-3}$ и сравнения с ним данных вычислений и фильтраций показаны тонкими линиями. На рис. 7,б представлены результаты фильтрации данных, полученных для разных n при предварительной их фильтрации по $\Delta\tau$. Толстыми линиями показаны результаты фильтрации разностей значений, вычисленных для последовательных значений n (для выбора эталона). Кривая 0 соответствует разности вычисленных значений, кривые 1 и 2 соответствуют значениям, отфильтрованным один и два раза. Тонкими линиями показаны результаты выбора эталона, равного $\Delta_0 = -0.5 \cdot 10^{-3}$ и сравнения вычисленных и отфильтрованных данных с эталоном.

Заметим, что линия 1 служит для оценки погрешности, а линия 2 только для подтверждения этой оценки.

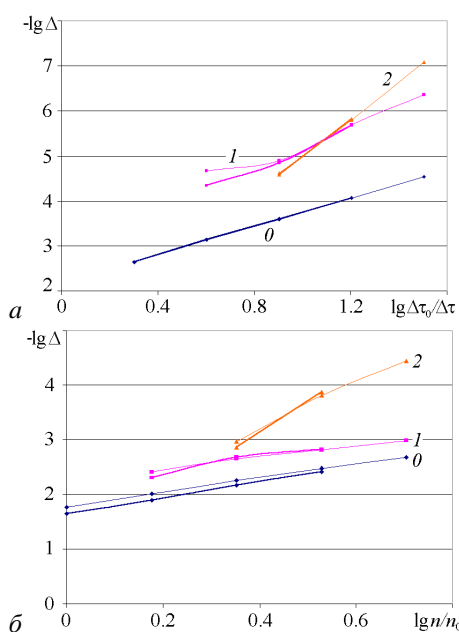


Рис. 7. Формы образа МЭП на плоскостях: а – комплексного потенциала; б – годографа

Видно, что надежная оценка погрешности не превосходит 3 значащих цифр. Это заставляет считать результат Δ_0 сомнительным. Следовательно, разница между квазистационарным и нестационарным решениями, превосходящая вычислительную погрешность, не обнаружена.

5. Заключение

В данной работе сформулирована и решена задача квазистационарной ЭХО. Применение ступенчатой функции выхода по току от плотности тока приводит к появлению на обрабатываемой поверхности участков с тремя типами граничных условий (стационарности, переходного и нерастворимости). Это позволяет объяснить особенности реального процесса путем сравнения формы обрабатываемой поверхности на переходных участках и формы свободной поверхности в гидродинамической задаче о течении из-под прямолинейного щита (в частности бесконечной кривизной поверхности в точке отрыва).

Численные результаты исследований позволили получать характеристики нестационарных процессов формообразования. Найдено, что изменение характерных размеров (например, торцевого зазора) при нестационарном решении описывается показательным законом. Найдены конкретные зависимости этих параметров от времени. Это важно для развития технологий прецизионной ЭХО.

Полученные результаты позволяют сравнить решения нестационарных задач со стационарными и квазистационарными решениями. Это упрощает оценку погрешности и увеличивает надежность

численных результатов. Найдены также диапазоны применимости упрощенных методов исследования нестационарных процессов (квазистационарного и предельно-квазистационарного).

Условием формирования квазистационарного процесса является монотонное увеличение напряженности в точках обрабатываемой поверхности. Например, это справедливо для обработки вертикальной пластиной и угловым ЭИ. Но это несправедливо для обработки точечным ЭИ и горизонтальным пластинчатым ЭИ (для достаточно долгого времени обработки). В этих двух и других подобных случаях на части обрабатываемой поверхности образуется финальная форма, граничащая с нерастворимой зоной. Поскольку растворение отсутствует, то форма этого участка остается постоянной.

Численные исследования показывают, что в случае квазистационарного процесса предельная область обрабатываемой поверхности формируется достаточно быстро. Эта область ограничивается условием равенства модуля напряженности критическому значению. Стационарная область формируется более медленно поэтому, квазистационарное решение возможно для $\tau \geq \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(\alpha)$.

Сравнение полученных нестационарных и квазистационарных форм (в диапазоне существования последовательных квазистационарных решений) показывает отсутствие различий превышающих погрешность решения нестационарной задачи (приблизительно 10^{-3}).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-07-00356).

Список используемых источников

1. Клоков В. В. Влияние переменного выхода по току на стационарное анодное формообразование / В. В. Клоков // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Казанск. ун-т, 1979. Вып. 16. С. 94–102.
2. Электрохимическое формообразование / В. В. Клоков. – Казань: КГУ, 1984. – 80 с.
3. Клоков В. В. Стационарное анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода / В. В. Клоков, С. Е. Шишкин // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Казанск. ун-т, 1985. Вып. 22. С. 117–124.
4. Методы расчета электрохимического формообразования / А. Х. Каримов, В. В. Клоков, Е. И. Филатов – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 386 с.
5. Газизов Е. Р., Маклаков Д. В. Метод расчета анодного формообразования двугранным катодом

- для произвольной зависимости выхода по току // Теория и практика электрофизикохимических методов обработки деталей в авиастроении. Казань: КАИ, 1994. С. 32–35.
6. Газизов Е. Р., Маклаков Д. В. Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Известия вузов. Авиационная техника, 2002. №4. С. 55–57.
 7. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ, 2003. Т. 44, №3. С. 179–184.
 8. Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ / Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. – М.: Academia, 2005. – 200 с.
 9. Газизов Е. Р. Анодное формообразование криволинейным катодом при неравномерной поляризации анода // Известия КГАСУ. 2006, №1(5). С. 132–135.
 10. Миназетдинов Н. М. Гидродинамическая интерпретация одной задачи теории размерной электрохимической обработки металлов // ПММ, 2009. Т. 73, № 1. С. 60–68.
 11. Миназетдинов Н. М. Об одной задаче размерной электрохимической обработки // ПМТФ, 2009. Т. 50, №3. С. 214–220.
 12. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Моделирование электрохимического формообразования с использованием криволинейного электрода при ступенчатой зависимости выхода по току от его плотности // ПМТФ, 2016. Т. 57, № 1. С. 146–155.
 13. Волгин В. М., Давыдов А. Д. Псевдонестационарный метод моделирования электрохимического формообразования // Электрохимия. 2017. Т. 53, № 10. С. 1248–265.
 14. Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Porechny S. S. Stationary electrochemical machining simulation applying to precision technologies // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS, Chelyabinsk, Russia), 2017. Vol. 10. №. 4, P. 15–25.
 15. Ястребов В. Н., Каримов А. Х. Математическое моделирование нестационарного процесса электрохимического скругления кромок деталей ГТД // Электрохимические и электрофизические методы обработки материалов. Казань: КАИ, 1989. Вып. 1. С. 23 – 34.
 16. Мустянце А.Н., Эрлихман Ф.М., Энгельгардт Г.Р., Дикусар А. И. Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ // Электронная обработка материалов, Кишинёв, Штиинца, 1989. №3: 11–15.
 17. Christiansen S., Rasmussen H. Numerical solutions for two-dimensional annular electrochemical machining problems // J. Inst. Maths. Applics. 1976. №18, P. 295–307.
 18. Purcar M., Bortels L., Van den Bossche B., Deconinck J., 2004. 3D electrochemical machining computer simulations // J. Mat. Proc. Tech. 149(1-3). P. 398–403.
 19. Volgin V. M., Davydov A. D. Modeling of multistage electrochemical shaping. // Journal of Materials Processing Technology, 2004. V. 3. P. 466–471.
 20. Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Zinatullina O. V., Kamashev A. V. Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining // Journal of Materials Processing Tech., 2004, Vol. 149/1-3. Elsevier. P. 398–403.
 21. Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Sherykhalina N. M., Urakov A. R. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // Journ. Eng. Math., Vol. 55, Nos. 1-4, 2006. P. 255–276.
 22. Volgin V. M., Do V. D., Davydov A. D. Modeling of wire electrochemical machining // Chem. Eng. Trans. 2014, №41. P. 91–96.
 23. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. 2010. № 10. С. 77–81.
 24. Zhitnikov V. P., Oshmarina E. M., Fedorova G. I. Exact Solutions of two limiting quasistationary electrochemical shaping problems // Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2011, Vol. 55, №. 12. P. 16–22.
 25. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат – М.: Наука, 1987. – 688 с.
 26. Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич – М.: Наука, 1979. – 536 с.
 27. Житников В. П., Шерыхалина Н. М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60.
 28. Шерыхалина Н.М. Методы обработки результатов численного эксперимента для увеличения их точности и надежности // Вестник УГАТУ (сер. Управление, вычислительная техника и информатика), 2007. Т. 9, №2 (20). С. 127–137.