

# Математическое и программное обеспечение поддержки принятия решений в страховании

Е.И. Прокудина  
Факультет информатики и робототехники  
Уфимский государственный авиационный  
технический университет  
Уфа, Россия  
e-mail: [preliv@gmail.com](mailto:preliv@gmail.com)

А.Ф. Садыков  
Факультет информатики и робототехники  
Уфимский государственный авиационный  
технический университет  
Уфа, Россия  
e-mail: [art9814@yandex.ru](mailto:art9814@yandex.ru)

## Аннотация<sup>1</sup>

В работе построена математическая модель функционирования страховой компании и разработано программное обеспечение для решения задач принятия стратегических решений в страховом бизнесе.

## 1. Введение

При управлении страховой компанией необходимо решать задачи, связанные с выбором стратегии развития компании на заданном временном горизонте. Это могут быть, в частности, задачи формирования инвестиционного портфеля, планирования перестрахования, принятия решений в ценообразовании и т.д.

Для анализа финансовых последствий различных предпринимательских стратегий применяется стохастическое имитационное моделирование, называемое также динамическим финансовым анализом [1]. Применим данный подход для построения математической модели функционирования страховой компании, описывающей основные финансовые потоки и риски компании.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу выбора стратегии развития страховой компании на заданном промежутке времени  $[0, T]$ . Под стратегией мы понимаем вектор  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  параметров, характеризующих стратегию, например, доли вложений страховой компании в различные финансовые инструменты, параметры перестрахования и т.д.

Исходными данными являются временные ряды, описывающие основные денежные потоки страховой

компании (выплаты страхователям, расходы компании, доходы от инвестиционных вложений), временные ряды процентных ставок, доходностей ценных бумаг, значения параметров функционирования страховой компании.

Состояние страховой компании будем характеризовать мерой дохода и мерой риска.

Требуется определить стратегию страховой компании, то есть вектор  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , на заданном промежутке времени  $[0, T]$ , при которой риск страховой компании минимален, а ожидаемая прибыль максимальна.

То есть требуется найти вектор  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  такой, что

$$\mu(\alpha) \rightarrow \min, m(\alpha) \rightarrow \max,$$

где  $\mu(\alpha)$ ,  $m(\alpha)$  – нормированные значения риска и ожидаемой прибыли компании соответственно.

Для сведения двухкритериальной задачи к однокритериальной используем следующую аддитивную свёртку:

$$V(\alpha) = \beta \cdot \mu(\alpha) - (1 - \beta) \cdot m(\alpha) \rightarrow \min,$$

где  $\beta$  – коэффициент, отражающий предпочтения лица, принимающего решения,  $\beta \in [0, 1]$ .

## 3. Математическая модель функционирования страховой компании

Допущения модели:

- в течение рассматриваемого временного периода экономика страны находится в стабильном состоянии, уровень инфляции является невысоким;
- страховая компания занимается рисковыми видами страхования;
- потери страхователей оплачиваются в полном объеме в момент предъявления исков;
- нет разделения выплат и премий по видам страхования;
- состояние рынка страхования не изменяется;

Труды Шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018

- страховая компания инвестирует свободные средства в  $s$  различных финансовых инструментов;
- страховая компания планирует заключить договор перестрахования, необходимо выбрать вид перестрахования: пропорциональное или перестрахование превышения потерь, а также значение соответствующей характеристики перестрахования: доли или предела удержания [2,3];
- время в модели принимает целые неотрицательные значения.

Рассмотрим критерий  $V(\mathbf{a}) = \beta \cdot \mu(\mathbf{a}) - (1-\beta) \cdot m(\mathbf{a})$ .

Математическое ожидание прибыли страховой компании равно

$$E(U_T(\mathbf{a})) - U_0,$$

где  $U_T(\mathbf{a})$  – капитал страховой компании в момент  $T$ ;

$U_0$  – капитал страховой компании в начальный момент времени.

В качестве  $\mu(\mathbf{a})$  используем вероятность разорения компании:

$$R = P(U_t(\mathbf{a}) < 0), t \in [0, T].$$

Размер чистых активов вычисляется по формуле:

$$U_t = U_{t-1} + P_t + I_t - L_t - E_t - Q_{t-1},$$

где  $P_t$  – премии, собранные за период  $(t-1, t]$ ,

$I_t$  – доход компании от инвестиционной деятельности в момент  $t$ ,

$L_t$  – страховые выплаты в момент  $t$ ,

$E_t$  – расходы в момент  $t$ ,

$Q_{t-1}$  – плата за перестрахование в момент  $t-1$ .

Рассмотрим, что представляет собой каждая случайная величина, входящая в данную формулу.

Доход от инвестирования является случайной величиной и зависит от доходностей выбранных финансовых инструментов на рассматриваемом интервале времени:

$$I_t = \gamma U_{t-1} \sum_{i=1}^s \delta_{i-1} r_{i-1},$$

где  $\gamma$  – доля капитала вложенного в инвестиции,

$r_{i-1}$  – доходность  $i$ -го финансового инструмента на промежутке  $(t-1, t]$ ,

$\delta_{i-1}$  – доля вложений в  $i$ -й финансовый инструмент в момент  $t-1$ ,

$$\sum_{i=1}^s \delta_{i-1} = 1, 0 \leq \delta_{i-1} \leq 1.$$

Выплаты страхователям за период  $(t-1, t]$  для пропорционального перестрахования вычисляются по формуле:

$$L_t = \lambda \cdot N_t \cdot Y_t,$$

где  $\lambda$  – доля участия страховой компании в покрытии потерь величиной  $Y_t$ ,

$N_t$  – число потерь на промежутке  $(t-1, t]$ .

Для перестрахования превышения потерь выплаты вычисляются по формуле:

$$\underline{L}_t = N_t \cdot Y_t^d,$$

где  $d$  – предел собственного участия страховой компании в покрытии потерь  $Y_t$ .

$$Y_t^d = \begin{cases} Y_t, & Y_t < d, \\ d, & Y_t \geq d. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что нормы расходов равны некоторой доле  $k_1$  от объема поступающих премий  $P_t$  и некоторой доле  $k_2$  от объема страховых выплат  $L_t$ :

$$E_t = k_1 \cdot P_t + k_2 \cdot L_t.$$

Если страховая компания планирует заключить договор перестрахования, то плата за перестрахование  $Q_{t-1}$  для пропорционального перестрахования вычисляется следующим образом:

$$Q_{t-1} = (1+\theta) (1-\lambda) E(L_t),$$

где  $\theta$  – относительная страховая надбавка перестраховочной компании.

Для перестрахования превышения потерь плата за перестрахование вычисляется по формуле:

$$Q_{t-1} = (1+\theta) E(L_t - L_t^d).$$

Уточним, что стратегия развития компании – вектор  $\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – это вектор, состоящий из параметров  $\delta_{it}$ ,  $\lambda$  и  $d$ . Т.е. требуется найти инвестиционную стратегию страховой компании, а также выбрать вид и характеристику договора перестрахования, при которых критерий  $V(\mathbf{a})$  принимает минимальное значение.

### 3. Поиск оптимальной стратегии на основе имитационного моделирования

Задаются входные параметры модели (значения параметров, исходные массивы данных).

Для нахождения прогнозных значений переменных модели  $r_{it}$ ,  $N_{it}$ ,  $Y_{it}$ ,  $P_{it}$  на основе входных данных строятся эмпирические законы распределения случайных величин ( $r_{it}$ ,  $N_{it}$ ,  $Y_{it}$ ) или эконометрические модели временных рядов ( $P_{it}$ ).

При заданных значениях параметров  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , которые меняются с определенным шагом:

- проводится  $K$  испытаний, каждое из которых соответствует функционированию страховой компании при заданных входных параметрах в течение рассматриваемого временного периода;

при этом в каждый момент времени  $t$  генерируются значения параметров:  $r_t, N_t, Y_t, P_t$ ;

производится расчет капитала страховой компании;

фиксируется разорение или неразорение компании;

- вычисляются оценки: вероятности разорения, ожидаемой прибыли компании, критерия  $V(\mathbf{a})$ .

Находится стратегия компании  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ , при которой достигается минимум критерия  $V(\mathbf{a})$ .

Для оценки числа итераций  $K$  используется правило остановки имитационных экспериментов:

$$K = \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2},$$

где  $\alpha$  – уровень достоверности;  $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – квантиль стандартного нормального распределения уровня  $1-\alpha/2$ ;  $\varepsilon$  – относительная погрешность вычислений;  $\sigma^2$  – дисперсия индикаторной случайной величины, принимающей два значения: 1 – в случае разорения компании и 0 – в противном случае.

#### 4. Программное обеспечение и вычислительный эксперимент

На основе построенной математической модели в среде Microsoft Visual Studio 2012 на языке программирования C# разработано программное обеспечение, реализующее следующие функции: построение эмпирического закона распределения случайной величины, построение регрессионных моделей, нахождение оптимальной стратегии.

Рассмотрим результаты вычислительного эксперимента, проведенного при следующих входных данных:

1. статистические данные о числе страховых выплат, величине одной страховой выплаты, величине премий за период с 2006 по 2015 годы;
2. значение капитала компании в начальный момент времени  $U_0 = 2\,200\,000$  рублей;
3. доли расходов компании на ведение дел:  $k_1 = 0,3$ ,  $k_2 = 0$ ;
4. доля капитала, вложенного в инвестиции,  $\gamma = 0,5$ ;
5. значение весового коэффициента  $\beta = 0,5$ ;
6. период моделирования  $T = 1$  год;
7. относительная погрешность вычислений  $\varepsilon = 0,01$ , уровень достоверности  $\alpha = 0,99$ ;
8. инвестирование временно свободных денежных средств осуществляется в акции и облигации в равных долях;

9. статистические данные для моделирования доходов от инвестирования в акции, а именно месячные значения индекса Российской Торговой Системы (РТС) за период с января 2013 года по декабрь 2015 года.

На рис. 1. и 2. представлены вкладки «Доходность акций» и «Выплаты», на которых отображены исходные данные, а также результаты их обработки.

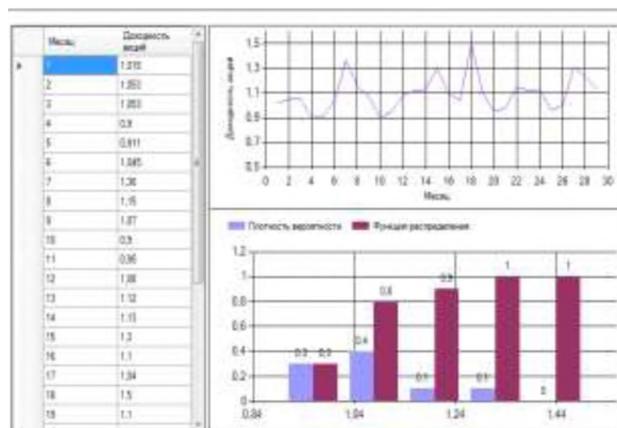


Рис. 1. Вкладка «Доходность акций»

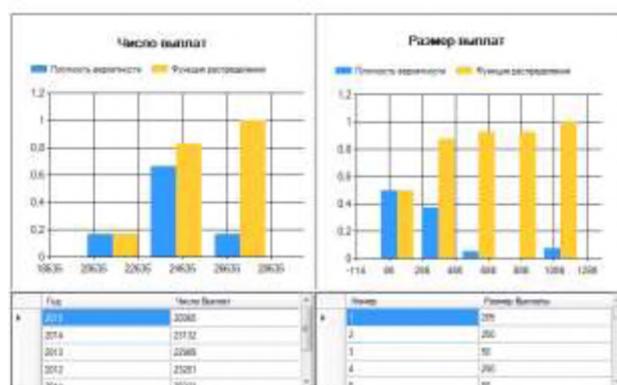


Рис. 2. Вкладка «Выплаты»

На рис. 3. представлены графики зависимости вероятности разорения от характеристики перестрахования ( $\lambda, d$ ) и платы за перестрахование  $Q_0$  для различных видов договоров перестрахования.

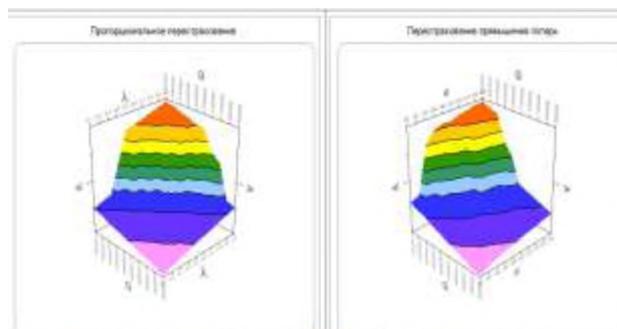
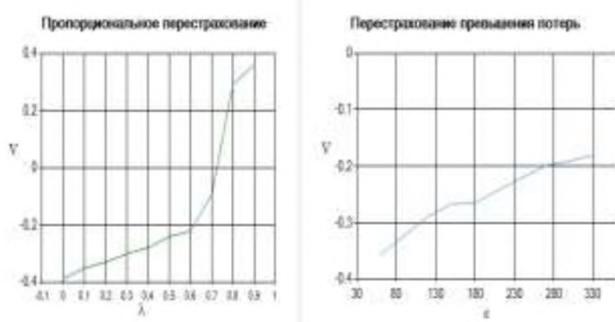


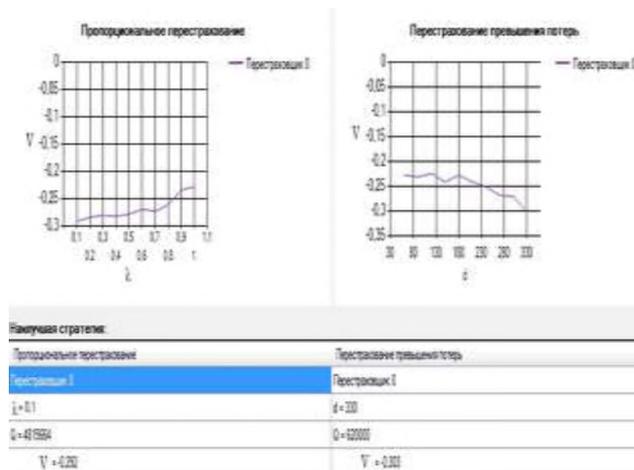
Рис. 3. Зависимость вероятности разорения от характеристики перестрахования и платы за перестрахование

На рис. 4. представлены графики зависимости вероятности разорения от характеристики перестрахования ( $\lambda, d$ ) при фиксированном значении  $Q_0$  для различных видов договоров перестрахования.



**Рис. 4. Зависимость вероятности разорения от характеристики перестрахования при фиксированной цене за перестрахование**

На рис. 5. представлены результаты расчета оптимальной стратегии.



**Рис. 5. Окно вывода результатов расчета наилучшей стратегии**

При заданных входных данных оптимальным (с учетом приближенных вычислений) оказалось перестрахование превышения потерь с пределом удержания 330 000 руб.

## 5. Заключение

- На основе динамического финансового анализа построена стохастическая модель деятельности страховой компании, занимающейся видами страхования иными, чем страхование жизни, с учетом перестрахования и вложения свободных денежных средств компании в различные финансовые инструменты.
- Разработано программное обеспечение, реализующее математическую модель. Данный программный продукт позволяет строить эмпирические законы распределения случайных величин, рассчитывать коэффициенты регрессионных моделей;

вычислять значения основных показателей деятельности страховой компании; принимать решение относительно стратегии развития компании на основе критерия «риск-доход».

## Список используемых источников

1. Kaufmann R., Gadmer A. & Klett R. Introduction to Dynamic Financial Analysis //ASTIN Bulletin. 2001. Vol. 31, № 1. P. 213-249.
2. Бронштейн Е.М., Прокудина Е.И. Основы актуарной математики.–Уфа: УГАТУ, 2012.— 315 с. URL:[http://e-library.ufa-rb.ru/dl/lib\\_net\\_r/Bronshtein\\_Osn\\_akt\\_mat-ki\\_2012.pdf](http://e-library.ufa-rb.ru/dl/lib_net_r/Bronshtein_Osn_akt_mat-ki_2012.pdf) (дата обращения: 03.04.2017).
3. Prokudina E., Ishakov F. Strategic Decisions Making for an Insurance Company Based on Dynamic Financial Analysis. // Proc. of the 12th International Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT" 2010. Russia, Moscow, St.Petersburg, 2010. P. 187- 192