

# Численное решение полигармонических уравнений в механике сплошных сред

А.Г. Терентьев  
Факультет прикладной математики, физики  
и информационных технологий  
Чувашский государственный университет  
имени И.Н. Ульянова  
Чебоксары, Россия  
e-mail: [agterent@rambler.ru](mailto:agterent@rambler.ru)

А.О. Казакова  
Факультет прикладной математики, физики  
и информационных технологий  
Чувашский государственный университет  
имени И.Н. Ульянова  
Чебоксары, Россия  
e-mail: [kazakova\\_anastasia@bk.ru](mailto:kazakova_anastasia@bk.ru)

Е.А. Микишанина  
Факультет прикладной математики, физики  
и информационных технологий  
Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова  
Чебоксары, Россия  
e-mail: [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru)

## Аннотация

В статье рассмотрены плоские математические модели механики сплошных сред, описываемые полигармоническими уравнениями, в том числе неоднородными. Для исследования этих моделей применен численный метод граничных элементов. Представлены тестовые примеры, подтверждающие высокую точность алгоритма, а также результаты решения некоторых прикладных задач механики.

## 1. Введение

Многие задачи механики сплошных сред сводятся к решению полигармонических уравнений вида

$$\Delta^n u = f(x, y), \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лапласа,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $f(x, y) = 0$ , то уравнение (1) называется однородным.

Однако удобные аналитические выражения получены только для некоторых областей частного вида. В случае же областей сложной формы требуется применение численных методов.

---

Труды Шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018

Ниже будет рассмотрено численное решение плоской задачи гидродинамики для вязкой жидкости и плоских задач теории упругости с применением разработанного ранее численного метода для однородного полигармонического уравнения [1]. В частности, уравнение изгиба тонкой пластинки представляет собой неоднородное бигармоническое уравнение и в ряде случаев сводится к уравнению вида (1) с нулевой правой частью.

## 2. Движение цилиндра в вязкой жидкости

Рассматривается плоская гидродинамическая задача об исследовании движения цилиндра в ограниченной вязкой жидкости, когда инерционными силами можно пренебречь (приближение Стокса). Предполагается малость числа Рейнольдса. В этом случае рассматриваемая математическая модель описывается с помощью основной краевой задачи для бигармонической функции тока.

### 2.1. Математическая модель задачи

Пусть в плоскости  $xOy$  контур  $C_1$  движется внутри неподвижного контура  $C_2$ . Обозначим через  $U_x, U_y$  проекции вектора скорости точки движущегося твердого тела на оси  $x$  и  $y$ .

Если жидкость несжимаема, то для плоской задачи можно ввести функцию тока  $\psi(x, y)$ , через которую выражаются компоненты скорости жидкости и завихренность потока:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\Delta \psi. \quad (2)$$

Можно показать, что функция тока удовлетворяет бигармоническому уравнению  $\Delta^2 \psi = 0$ . Граничные

условия для определения функции тока получаются из условия прилипания, в соответствии с которым на контурах  $C_1$  и  $C_2$  скорость жидкости совпадает со скоростью точки контуров:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_1} = U_x, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_1} = -U_y, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_2} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия (3) позволяют определить нормальную и касательную производные функции тока на границах  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{C_1} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right)_{C_1} = U_y y'_s + U_x x'_s, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{C_2} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right)_{C_2} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{C_1} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_1} \tau_x + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_1} \tau_y = U_y x'_s - U_x y'_s, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{C_2} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_2} \tau_x + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_2} \tau_y = 0.$$

Равенства (5) можно проинтегрировать по  $s$  и получить значения функции  $\psi$  на границах  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\psi|_{C_1} = -U_y x + U_x y, \quad \psi|_{C_2} = const. \quad (6)$$

Так как скорость и завихренность потока выражаются только через производные функции тока, то можно положить  $const = 0$ . Рассматриваемая задача эквивалентна краевой задаче для бигармонического уравнения с граничными условиями (4), (6).

## 2.2. Применение метода граничных элементов

В [1] получены интегральные соотношения для полигармонических функций. В частности, для бигармонической функции  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \hat{\psi}(P) &= \int_{\partial D} (\hat{\phi} G_0 - \hat{\psi} H_0) ds, \\ \varepsilon \psi(P) &= \int_{\partial D} (\phi G_0 - \psi H_0 + \hat{\phi} G_1 - \hat{\psi} H_1) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\hat{\psi} = \Delta \psi$ ,  $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ,  $\hat{\phi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n}$ ,  $G_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ ,

$$G_1 = \frac{r^2}{8\pi} \left( 1 + \ln \frac{1}{r} \right), \quad H_0 = \frac{\partial G_0}{\partial n}, \quad H_1 = \frac{\partial G_1}{\partial n},$$

$r$  – расстояние между точкой  $P$  и точкой интегрирования,  $\varepsilon = 0.5$  для точки  $P$  на гладкой границе и  $\varepsilon = 1$  для внутренней точки.

С помощью метода граничных элементов система интегральных уравнений (7) может быть сведена к системе двух матричных уравнений

$$(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{\Psi} - \mathbf{B} \mathbf{\Phi} = 0, \quad (8)$$

$$(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{\Psi} - \mathbf{B} \mathbf{\Phi} + \mathbf{A} \mathbf{\Psi} - \mathbf{B} \mathbf{\Phi} = 0,$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}$  – вектор-столбцы, компонентами которых являются значения функций в контрольных точках:  $\Psi_j = \psi(P_j)$ ,  $\Phi_j = \phi(P_j)$ ,  $\hat{\Psi}_j = \hat{\psi}(P_j)$ ,  $\hat{\Phi}_j = \hat{\phi}(P_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ ;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  – матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием по прямолинейным граничным элементам  $\Gamma_j$ :

$$A_{i,j} = \int_{\Gamma_j} H_0 ds, \quad B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_0 ds, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

$$A_{i,j} = \int_{\Gamma_j} H_1 ds, \quad B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_1 ds,$$

Элементы матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  могут быть выражены аналитически, но проще их находить, используя формулы численного интегрирования.

Система (8) представляет собой систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2N$  неизвестных компонент векторов  $\mathbf{\Psi}$  и  $\mathbf{\Phi}$ . Элементы векторов  $\mathbf{\Psi}$  и  $\mathbf{\Phi}$  известны из постановки задачи и определяются условиями (4), (6).

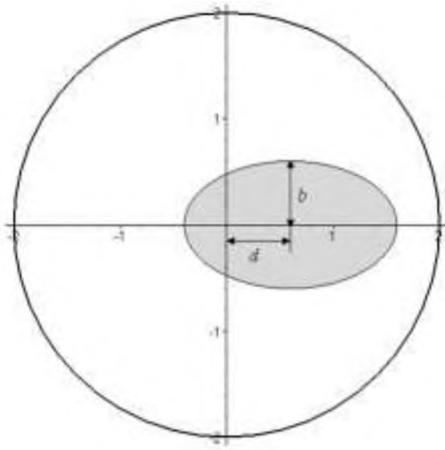
## 2.3. Поступательное движение эллиптического цилиндра

Пусть подвижный контур  $C_1$  представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  и находится внутри неподвижного контура  $C_2$  – окружность радиуса  $R$ . Рассмотрим равномерное поступательное движение эллиптического цилиндра вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $U$ , граничные условия (3) примут вид:

$$u_x|_{C_1} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_1} = U, \quad u_y|_{C_1} = -\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_1} = 0, \quad (9)$$

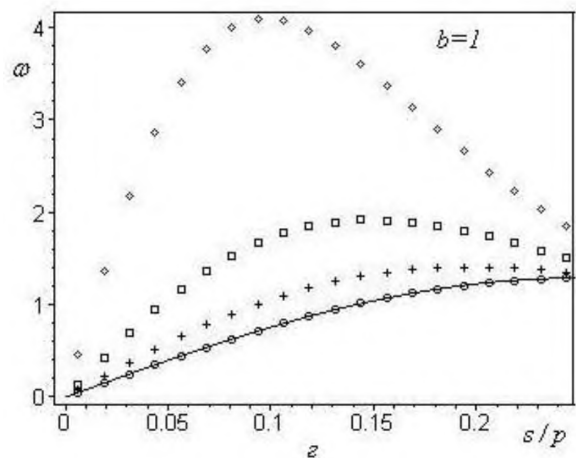
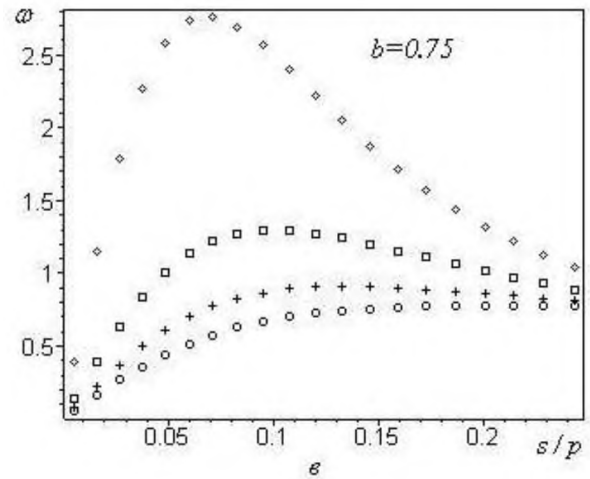
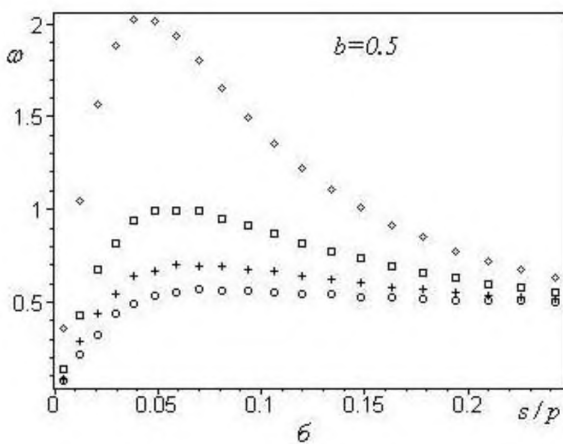
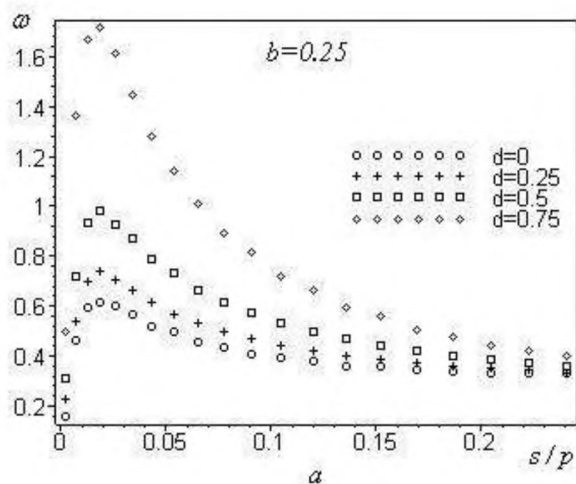
$$u_x|_{C_2} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_2} = 0, \quad u_y|_{C_2} = -\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_2} = 0.$$

Положим для определенности  $U = 0.1$  м/с,  $R = 2$  м,  $a = 1$  м. Приведем результаты численного решения для различных значений расстояния  $d$  между центрами цилиндров (рис. 1).



**Рис. 1. Поступательное движение цилиндра**

На рис. 2 показаны значения завихренности потока  $\omega = -\Delta\psi$  на границе  $C_1$ , полученные в результате численного решения, для различных значений параметров  $b$  и  $d$ . В [2] получено аналитическое решение для круговых концентрических цилиндров ( $b = a$ ,  $d = 0$ ). На рис. 2 ( $z$ ) соответствующий график показан сплошной линией. Из графика видно, что численное и аналитическое решения совпадают.



**Рис. 2. Завихренность потока для различных значений  $b$  и  $d$**

### 3. Плоская задача теории упругости

Определение упругого равновесия в плоской задаче сводится к решению краевых задач для бигармонического уравнения. Поэтому может быть применен аналогичный численный алгоритм, что и в случае плоской гидродинамической задачи для вязкой жидкости. Однако здесь особое внимание следует уделить краевым условиям, которые в случае многосвязной области содержат дополнительные константы [3].

#### 3.1. Постановка задачи

Пусть задана произвольная плоская область  $T$ , и пусть граница этой области  $\partial T$  задана функциями дуговой координаты ( $s \in \partial T$ ):  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ . На границе области заданы нормальное и касательное напряжения  $p_n(s)$  и  $p_\tau(s)$ , связанные с вектором  $\mathbf{b} = [b_x(s), b_y(s)]$  внешнего напряжения равенствами

$$b_x = p_n \tau_y + p_\tau \tau_x, \quad b_y = p_\tau \tau_y - p_n \tau_x,$$

где  $\tau_x = x'_s$ ,  $\tau_y = y'_s$  - компоненты касательного единичного вектора.

Требуется определить компоненты тензора напряжений в каждой точке области  $T$ .

На границе области внешнее напряжение выражается через компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{xx}\tau_y - \sigma_{xy}\tau_x = b_x, \quad \sigma_{xy}\tau_y - \sigma_{yy}\tau_x = b_y. \quad (10)$$

Равенства (10) – граничные условия для определения тензора напряжений, их можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -y'_s \int_0^s b_y(s) ds - x'_s \int_0^s b_x(s) ds + C_1 y'_s - C_2 x'_s, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & \int_0^s (x(s)b_y(s) - y(s)b_x(s)) ds + \\ & + x(s) \left( C_1 - \int_0^s b_y(s) ds \right) + y(s) \left( C_2 + \int_0^s b_x(s) ds \right) + C_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, задача теории упругости эквивалентна основной краевой задаче для бигармонической функции  $\varphi$  с граничными условиями (9) и (10).

### 3.2. Метод граничных элементов и определение констант

Если область  $T$  является односвязной, то константы  $C_1, C_2, C_3$  можно задать произвольно (например, принять их равными нулю), т.к. они входят в несущественную для напряжений линейную часть функции  $\varphi$ . В случае многосвязной области, на каждом контуре по три константы, лишь три из которых можно положить равными нулю (например, на наружном контуре), постоянные на других контурах не могут быть произвольными. Уравнения для определения неизвестных констант можно получить из условий однозначности смещений.

Как показано в [4], перемещение любого элемента области складывается из поступательного перемещения  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  и поворота относительно оси  $z$ . Перемещения  $u_x$  и  $u_y$ :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p \right), \\ u_y &= \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $G$  – константа, называемая модулем сдвига, зависящая от материала,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала,  $p$  и  $q$  – сопряженные гармонические функции, такие, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\Delta \varphi}{4}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Ввиду однозначности функций  $u_x$  и  $u_y$ , интегралы от их полных дифференциалов по замкнутому контуру должны быть равны нулю, откуда:

Численное решение полигармонических уравнений в механике сплошных сред

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds = \frac{1+\nu}{4} \oint_{(\partial T)_k} b_y(s) ds, \quad (14)$$

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = -\frac{1+\nu}{4} \oint_{(\partial T)_k} b_x(s) ds. \quad (15)$$

Угол поворота относительно оси  $z$  равен

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{G(1+\nu)} \frac{\partial q}{\partial x},$$

откуда следует, что функция  $Q = \frac{\partial q}{\partial x}$  должна быть однозначной. Очевидно, что  $\Delta \varphi$  и  $Q$  – сопряженные гармонические функции, поэтому

$$\begin{aligned} Q(s) &= \int_0^s dQ = \int_0^s \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) = \\ &= \int_0^s \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} dx \right) = \int_0^s \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) получается третье условие, которое должно выполняться при однозначных перемещениях:

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds = 0. \quad (17)$$

Если результирующая внешних сил, действующих на каждый контур, равна нулю, то условия (14), (15) на внутренних контурах границы принимают вид

$$\oint_{(\partial D)_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{(\partial D)_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0. \quad (18)$$

Первое из равенств (18) дает:

$$\sum_{j=1}^N U_j^{(k)} \int_{\Gamma_j^{(k)}} y'_s ds + \sum_{j=1}^N Q_j^{(k)} \int_{\Gamma_j^{(k)}} x'_s ds = 0, \quad (19)$$

где  $\mathbf{Q}^{(k)}$  – вектор-столбец значений функции  $Q = \frac{\partial q}{\partial x}$  в контрольных точках контура  $(\partial T)_k$ .

Элементы вектора  $\mathbf{Q}^{(k)}$  можно представить в виде:

$$Q_j^{(k)} = \sum_{m=1}^j V_m^{(k)} \int_{\Gamma_m^{(k)}} ds. \quad \text{Тогда после некоторых}$$

преобразований (19) сводится к уравнению

$$\sum_{j=1}^N \left( h_j^{(k)} (x_1^{(k)} - x_j^{(k)}) V_j^{(k)} + (y_{j+1}^{(k)} - y_j^{(k)}) U_j^{(k)} \right) = 0.$$

Второе условие (18) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^N \left( h_j^{(k)} (y_1^{(k)} - y_j^{(k)}) V_j^{(k)} + (x_{j+1}^{(k)} - x_j^{(k)}) U_j^{(k)} \right) = 0.$$

Условие (17) легко сводится к линейному уравнению:

$$\sum_{j=1}^N V_j^{(k)} \int_{\Gamma_j^{(k)}} ds = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N h_j^{(k)} V_j^{(k)} = 0.$$

Таким образом, для каждого внутреннего контура многосвязной области  $T$  получены три линейных уравнения, которые совместно с (8) образуют полную систему уравнений для нахождения значений функций  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  и трех неизвестных констант интегрирования на внутренних контурах границы многосвязной области  $T$ .

### 3.3. Эксцентрическая труба под равномерным давлением

В качестве тестового примера для сравнения результатов численного расчета с точным решением, рассмотрим задачу об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным давлением. Точное решение этой задачи получено Я.С. Уфляндом в [5] с использованием биполярных координат. Рассмотрим эксцентрическое кольцо с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ ;  $d_1$  и  $d_2$  - расстояния от начала координат до центров окружностей,  $p_1$  и  $p_2$  - давления, действующие на внутренний и внешний контуры. Пусть для определенности  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 1.25$ . В биполярных координатах этим значениям будут соответствовать эксцентрические окружности, центры которых находятся на расстояниях  $d_1 = \sqrt{2}$  и  $d_2 = \sqrt{41}/4$  от начала координат. Далее следует задать граничные условия: пусть, например,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 3$ . Методом граничных элементов ( $N = 60$ ) находятся значения на границе области двух вспомогательных функций  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ , а также значения трех неизвестных постоянных. На рис. 3 приведен график напряжения  $\sigma_{xx}$  на окружности, лежащей внутри рассматриваемой области ( $r_0 = 1.125$ ,  $d_0 = \sqrt{181}/9$ ).

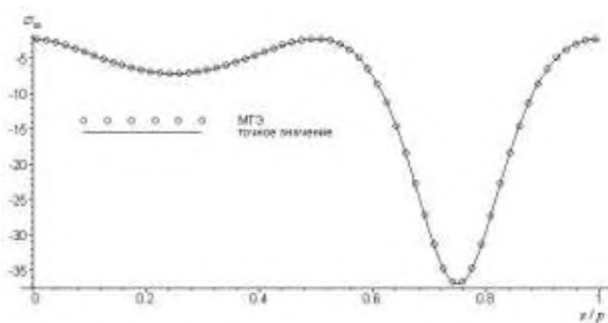


Рис. 3. Напряжение  $\sigma_{xx}$  на окружности

### 3.4. Эксцентрическая труба, погруженная в жидкость

Рассматривается задача об определении плосконапряженного состояния трубы с сечением в виде эксцентрического кольца, погруженной в воду на глубину  $h = 100$  м [6]. Расчеты проводились при  $N = 60$ . Внутреннее давление считаем равным

атмосферному. Внешнее давление изменяется по линейному закону с учетом давления воды на разной глубине. Применяя описанный выше алгоритм, можно вычислить значение функции напряжений, а также значения компонент тензора напряжений в любой точке области. На рис. 4 показаны рассмотренное сечение и графики зависимости касательного напряжения на границах трубы от дуговой координаты: радиусы кольца 10 м и 8 м; расстояние между центрами внутренней и внешней границы 1 м. Сплошной линией изображен график напряжения на внешнем контуре сечения (МПа), штриховой – на внутреннем контуре (кПа). Графики представлены только для значениям полярного угла  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Значения для остальной части границы определяются в силу симметрии рассматриваемой области и граничных условий.

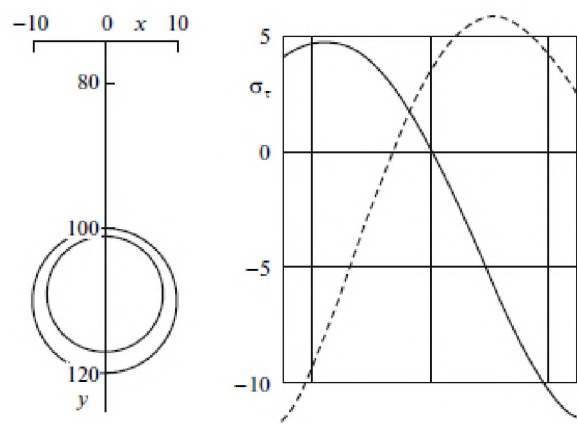


Рис. 4. Касательное напряжение на границах

## 4. Изгиб тонкой пластинки

Исследование изгиба тонких пластинок сводится к решению краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения. Причем, если нагрузка на поверхности пластины описывается полигармонической функцией порядка  $n$ , то функция прогибов будет определяться из полигармонического уравнения порядка  $n + 2$ . Поэтому может быть применен численный алгоритм, предложенный выше. В зависимости от способа закрепления кромок возможны разные способы задания граничных условий. Здесь мы рассмотрим жесткое закрепление края.

### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую недеформированную пластину с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , расположенную в плоскости  $(x, y)$  и ограниченную контуром  $C$ . Толщина пластины  $h$  много меньше его линейных размеров. Контур пластины жестко закреплен. Тогда функция прогиба при чистом изгибе удовлетворяет уравнению Софи Жермен

$$\Delta^2 u = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (20)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - коэффициент жесткости

пластины,  $q(x, y)$  - поперечная нагрузка. Для решения уравнения (20) необходимо задание граничных условий, которые будут определяться жестким защемлением кромок:

$$u|_C = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (21)$$

Если нагрузка является гармонической функцией (например, постоянная или линейно изменяющаяся нагрузка), то  $\Delta q = 0$ , и уравнение (20) примет вид

$$\Delta^3 u = 0.$$

#### 4.2. Численный алгоритм

В [1] получены интегральные соотношения для полигармонических функций. В частности, для полигармонической функции  $u = u_0$  справедливо [7]

$$\begin{aligned} \varepsilon u_2(P) &= \int_C (v_2 G_0 - u_2 H_0) ds, \\ \varepsilon u_1(P) &= \int_C (v_1 G_0 - u_1 H_0 + v_2 G_1 - u_2 H_1) ds, \\ \varepsilon u_0(P) &= \int_C (v_0 G_0 - u_0 H_0 + v_1 G_1 - \\ &\quad - u_1 H_1 + v_2 G_2 - u_2 H_2) ds, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $u_1 = \Delta u_0$ ,  $u_2 = \Delta u_1$ ,  $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial n}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ,

$$G_2 = \frac{r^4}{256\pi} \left( 3 + \ln \frac{1}{r^2} \right), \quad H_2 = \frac{\partial G_2}{\partial n}.$$

С помощью метода граничных элементов система интегральных уравнений (22) может быть сведена к системе трех матричных уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}_0) \mathbf{U}_2 - \mathbf{B}_0 \mathbf{V}_2 &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}_0) \mathbf{U}_1 - \mathbf{B}_0 \mathbf{V}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_2 &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}_0) \mathbf{U}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{V}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_1 - \\ - \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{V}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mathbf{E}$  - единичная матрица;  $\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  - вектор-столбцы, компонентами которых являются значения функций в контрольных точках:  $U_k^j = u_k(P_j)$ ,  $V_k^j = v_k(P_j)$ ,  $k = \overline{0, 2}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ;  $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$  - матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием по прямолинейным граничным элементам  $\Gamma_j$ :

$$A_0^{i,j} = \int_{\Gamma_j} H_0 ds, \quad B_0^{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_0 ds,$$

$$A_1^{i,j} = \int_{\Gamma_j} H_1 ds, \quad B_1^{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_1 ds, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

$$A_2^{i,j} = \int_{\Gamma_j} H_2 ds, \quad B_2^{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_2 ds,$$

В системе (23) координаты векторов  $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{U}_2$  определяются условиями (21) и (20), а координаты векторов  $\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  являются искомыми. Определив их значения, можно найти прогиб в любой точке пластины по третьей формуле (23), если положить в ней  $\varepsilon = 1$ .

#### 4.3. Изгибы пластин при различных нагрузках

Рассмотрим алюминиевую пластинку эллиптической формы с полуосями эллипса  $a=1$  м и  $b=0,75$  м и толщиной пластины  $h=0,003$  м. При постоянной нагрузке  $q(x, y) = 5.94 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$  изгиб плиты и линии уровня представлены на рис. 5.

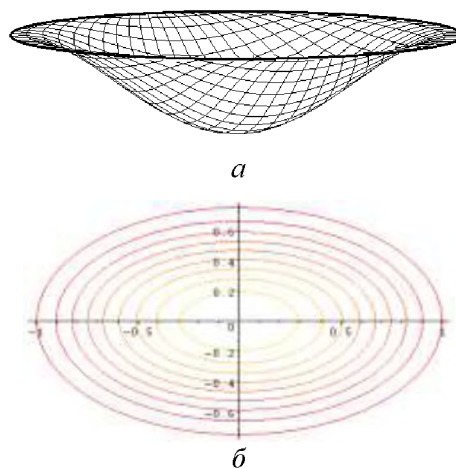
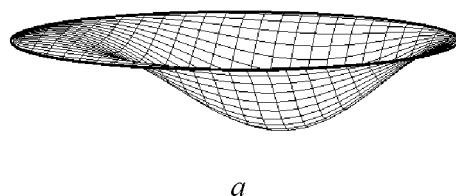
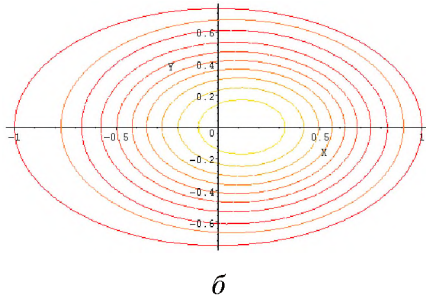


Рис. 5. Изгиб эллиптической пластины  
а - форма деформированной плиты  
б - линии уровня

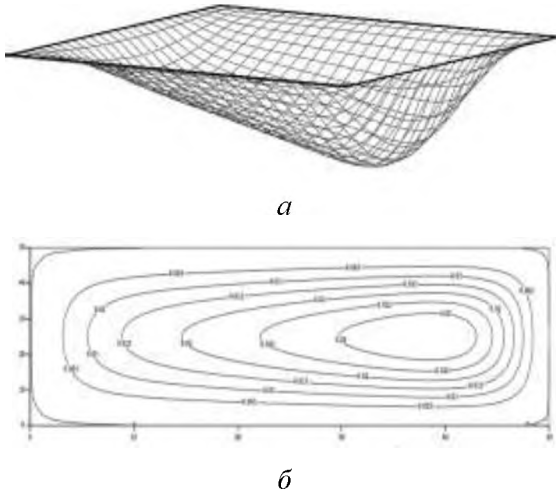
Линейная нагрузка  $q(x, y) = 5.94 \cdot 10^6 (1+x) \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$  для такой же пластины определяет изгиб пластины и линии уровня, которые представлены на рис. 6.





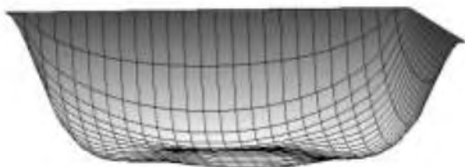
**Рис. 6. Изгиб эллиптической пластины**  
**а – форма деформированной плиты**  
**б – линии уровня**

Результаты для прямоугольной алюминиевой пластины со сторонами 1 м и 4 м под действием линейной нагрузки  $q = 64.2 + 100(1+x) \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$  представлены на рис. 7.



**Рис. 7. Изгиб прямоугольной пластины**  
**а – форма деформированной плиты**  
**б – линии уровня**

Рассмотрим квадратную алюминиевую пластинку со стороной 1 м, и поперечной нагрузкой  $q(x, y) = 5.94 \cdot 10^6(1+x^2+y^2) \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$ . Нагрузка в данном случае является бигармонической функцией. Алгоритм численного решения будет аналогичен описанному в предыдущем пункте. На рис. 8 изображена форма деформированной пластинки.



**Рис. 8. Форма деформированной пластины**

## 5. Фильтрация

Исследование модели упругой пористой среды для моделирования проникания жидкости в упругое пористое тело с постоянным коэффициентом фильтрации в случае бесконечно длинных цилиндрических тел сводится к системе гармонического и бигармонического уравнений. Задача решается в рамках одновременного выполнения законов Гука и Дарси.

### 5.1. Постановка задачи

Рассматриваемая среда характеризуется линейной упругостью и пористостью, т.е. выполняется и обобщенный закон Гука и закон Дарси с постоянным коэффициентом проницаемости. Давление  $P = p - \rho g y$  фильтрации, как сферический тензор  $P\delta_{i,k}$ , можно объединить с тензором напряжений  $\sigma_{i,k}$ , т.е. рассмотреть обобщенный тензор  $\bar{\sigma}_{i,k} = \sigma_{i,k} - P\delta_{i,k}$ . Выражая элементы тензора через функцию Эри [4], которая в рассматриваемой области удовлетворяет бигармоническому уравнению, и, учитывая, что давление является функцией гармонической, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi = 0, \\ \Delta P = 0. \end{cases} \quad (24)$$

На границе  $\partial T$  давление должно быть заданным и направленным противоположно нормали, так что касательное напряжение равно нулю. Тогда напряжения на границе удовлетворяют следующим граничным условиям

$$\bar{\sigma}_{i,k} = -\delta_{i,k} n_k p_{\partial T}$$

Таким образом, справедливо

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_2 = -p_{\partial T} n_1, \quad (25)$$

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_2 = -p_{\partial T} n_2,$$

$$P = p_{\partial T} - \rho g y_{\partial T} \quad (26)$$

где  $\{n_1, n_2\}$  - вектор-нормаль к граничному контуру.

После преобразований граничные условия к системе (24) примут вид

$$\Phi = -p_{\partial T} \left( \frac{x_{\partial T}^2 + y_{\partial T}^2}{2} \right) + C_1 x_{\partial T} + C_2 y_{\partial T} + C_3.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = p_{\partial T} \left[ \frac{dx_{\partial T}}{ds} y_{\partial T} - \frac{dy_{\partial T}}{ds} x_{\partial T} \right] + C_1 \frac{dy_{\partial T}}{ds} - C_2 \frac{dx_{\partial T}}{ds},$$

$$P = p_{\partial T} - \rho g y_{\partial T}$$

Определение входящих в граничные условия констант и построение численного алгоритма аналогично пункту 3.2, [8].

## 5.2. Фильтрация через трубу эллиптического сечения

Рассмотрим задачу нахождения нормальных и касательных напряжений для кольца эллиптической формы с границами

$$(\partial T)_1: \begin{cases} x = a_1 \cos \theta, \\ y = -b_1 \sin \theta; \end{cases} \quad (\partial T)_2: \begin{cases} x = a_2 \cos \theta, \\ y = b_2 \sin \theta; \end{cases}$$

$$a_2 > a_1, b_2 > b_1, \theta \in [0, 2\pi)$$

и давлениями  $p_1$  и  $p_2$ .

Для определения напряженного состояния решаем систему (24) с граничными условиями

$$P|_{(\partial T)_1} = p_1, \quad P|_{(\partial T)_2} = p_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_1} = \frac{2p_1 a_1 b_1 - C_1 b_1 \cos \theta - C_2 a_1 \sin \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + b_1^2 \cos^2 \theta}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_2} = \frac{-2p_2 a_2 b_2}{\sqrt{a_2^2 \sin^2 \theta + b_2^2 \cos^2 \theta}},$$

$$\varphi \Big|_{(\partial T)_1} = \frac{p_1 (b_1^2 - a_1^2)}{2} \cos 2\theta + C_1 a_1 \cos \theta + C_2 b_1 \sin \theta + C_3,$$

$$\varphi \Big|_{(\partial T)_2} = \frac{p_2 (b_2^2 - a_2^2)}{2} \cos 2\theta.$$

Численное решение выполнялось при  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 3$ ,  $a_2 = 15$ ,  $b_2 = 9$ ,  $p_1 = 10^5$ ,  $p_2 = 1$ . После определения функции  $\varphi(x, y)$  могут быть найдены  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  дифференцированием по переменным, а также максимальное касательное напряжение:

$$|\sigma_\tau|_{\max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} / 2.$$

Графики максимального касательного напряжения (рис.9), а также давления  $P$  (рис.10), построены на внутренних эллипсах с полуосями  $a = 5.5, b = 3.3$  (1),  $a = 7.5, b = 4.5$  (2),  $a = 9.5, b = 5.7$  (3),  $a = 11.5, b = 6.9$  (4),  $a = 13.5, b = 8.1$  (5),  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

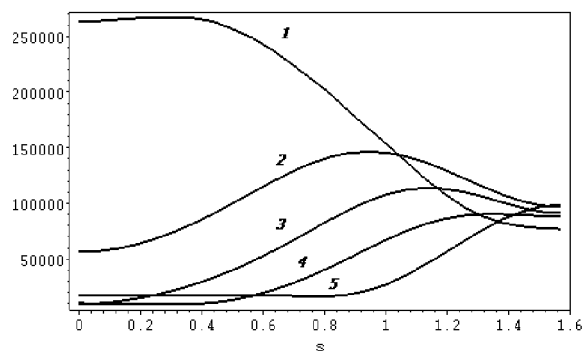


Рис. 9. Максимальное касательное напряжение

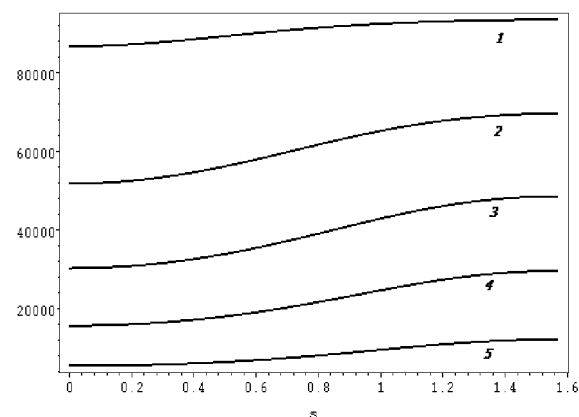


Рис. 10. Давление

## 6. Заключение

В статье изложены следующие основные результаты:

- Рассмотрены математические модели некоторых задач механики сплошных сред, которые могут быть описаны с помощью полигармонических уравнений: гидродинамическая задача для вязкой жидкости, плоская задача теории упругости, задача изгиба тонкой пластины с жестко заделанными краями и задача фильтрации.
- Для всех указанных задач предложено применение численного алгоритма, основанного на методе граничных элементов, который был ранее разработан для решения краевых задач для полигармонического уравнения.
- Рассмотрены тестовые примеры, подтверждающие высокую точность метода.
- Представлены результаты численных расчетов, полученные при решении некоторых конкретных числовых примеров, в том числе их графическая визуализация.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00220.



## Список используемых источников

1. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // ЖВМиМФ. 2010. Т. 52. № 11. С. 2050 – 2059.
2. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. НАНИ ЧР. 2002. № 2. С. 44–62.
3. Терентьев А.Г., Казакова А.О. Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 2(28). С. 35–48.
4. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
5. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
6. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 5. С. 721–727.
7. Казакова А.О., Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Моделирование изгиба жестко заделанной по контуру прямоугольной пластины // Математические модели и их приложения. 2017. Вып.19. С. 27-37.
8. Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. 159. № 2. С. 204-215.