Математическая модель задачи безкавитационного течения идеальной жидкости при электрохимической обработке металлов

Н.М. Миназетдинов
Факультет информационных систем и компьютерных технологий
Российский новый университет
Москва, Россия
e-mail: nminazetdinov@mail.ru

Аннотация[1]

При проектировании катода-инструмента для электрохимической обработки металлов, с целью обеспечения плавного, безотрывного течения электролита в межэлектродном промежутке можно применить операцию сглаживания острых кромок катода, при обтекании которых, как правило, происходит отрыв потока от поверхности электрода-инструмента.

В работе на основе модели идеального процесса электрохимического формообразования и теории струй идеальной несжимаемой жидкости построена модель нелинейной двумерной задачи электрохимической обработки металлов с учётом безотрывного течения электролита в межэлектродном промежутке.

Получено решение задачи, связанной с определением формы спрофилированного участка границы электрода-инструмента (катода) и установившейся границы обрабатываемой детали (анода).

1. Введение

Одной из актуальных задач теории электрохимической обработки металлов [1] является изучение особенностей гидродинамики потока электролита в межэлектродном промежутке и учёт этих особенностей при проектировании геометрии электрода - инструмента [2].

Высокая скорость течения электролита, его начальная загазованность и выделение газообразных продуктов электрохимических реакций способствуют возникновению кавитации [3], которая оказывает заметное влияние на точность электрохимического формообразования. Каверны частично экранируют рабочую поверхность катода, что приводит к образованию на обрабатываемой поверхности (аноде) различных макро дефектов [1, 4, 5].

В работе для описания течения электролита в межэлектродном промежутке используется модель идеальной несжимаемой жидкости [2, 6].

2. Схема межэлектродного промежутка

Схема сечения межэлектродного промежутка изображена на рис. 1. Введём систему декартовых координат (x_1, y_1), связанную с катодом, который движется в направлении, противоположном оси ординат с постоянной скоростью V_c. Рабочая поверхность AED катода состоит из прямолинейного участка AE, дуги ED, получаемой в результате сглаживания кромки катода. На границу DC катода, перпендикулярную оси абсцисс, нанесено диэлектрическое покрытие. Изоляция нерабочей части катода позволяет уменьшить наклон боковой стенки обрабатываемой поверхности. Линия ABC соответствует установившейся границе анода. Начало координат выбрано в точке E. Точки A и C являются бесконечно удалёнными. Поток направлен от точки A к точке C.

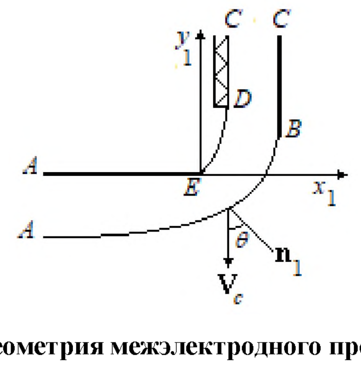

Рис. 1. Геометрия межэлектродного промежутка

В процессе заглубления катода-инструмента в тело заготовки, на границе заготовки формируется необрабатываемая зона, которой в модели соответствует прямолинейный участок BC.

[1] **Труды Шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018**

3. Модель процесса электрохимической обработки

Электрическое поле с потенциалом u в межэлектродном промежутке описывается уравнением Лапласа [1]. Функция $u(x_1, y_1)$ - мнимая часть комплексного потенциала электрического поля $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + i\,u(x_1, y_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ $\left(v(x_1, y_1)\right.$ — функция тока). На поверхности ABC анода и на рабочих участках AE и ED поверхности катода потенциал u принимает постоянные значения u_a и u_c соответственно [1]. На электро-изолированной границе DC выполняется условие

$$\partial u/\partial n_1 = 0\,. \qquad (1)$$

Для электролитов, являющихся растворами нитрата и хлората натрия, зависимость доли заряда η, затраченной на растворение металла, от анодной плотности тока j_a при обработке сталей можно представить в виде [7]

$$\eta\left(j_a\right) = \begin{cases} 0, & j_a \le j_{cr}, \\ a_0 + a_1/j_a\,, & j_a > j_{cr}. \end{cases} \qquad (2)$$

где $a_0 > 0, a_1 < 0, j_{cr}$ – постоянные.

Согласно условию (2), искомую установившуюся анодную границу разделим на два участка. На участке AB происходит растворение металла, и распределение нормальной производной потенциала на этом участке анодной границы удовлетворяет условию стационарности формообразования [7]

$$\left|\frac{dW_1}{dz_1}\right| = \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0}\left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right). \qquad (3)$$

где κ – удельная электропроводность среды; ε – электрохимический эквивалент металла; ρ – плотность материала анода; θ – угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ нормали к анодной границе (рис. 1). На участке BC анодная плотность тока изменяется от значения j_{cr} в точке B до нуля в точке C, а выход по току η равен нулю.

Введём в рассмотрение характерный размер $H = \kappa\left(u_a - u_c\right)/j_0$, $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$. Затем, с помощью преобразования [8]

$$W(z) = \frac{W_1(z) - i\,u_c}{u_a - u_c}\,,\quad z = \frac{z_1}{H} = x + iy\,,$$

введём безразмерный комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$.

Функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа [10] в межэлектродном промежутке с условиями на границах электродов ABC и AED

$$\psi_a = 1,\ \psi_c = 0\,. \qquad (4)$$

На границе изоляции DC, выполняется условие

$$\partial\psi/\partial n = 0\,. \qquad (5)$$

Из соотношения (3) следует, что на неизвестном участке AB анодной границы выполняется условие

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \frac{\partial\psi}{\partial n} = a\left(b + \cos\theta\right),\quad a = \frac{1}{a_0},\quad b = -\frac{a_1}{j_0}\,. \qquad (6)$$

Согласно схеме электрохимической обработки, на бесконечности в сечении AA выполняется условие $\theta = 0$, и безразмерная ширина h межэлектродного зазора в указанном сечении в соответствии с формулами (4) и (6), равна

$$h = \left(a\left(b+1\right)\right)^{-1}. \qquad (7)$$

4. Постановка и численно-аналитическое решение задачи.

В односвязной области $z = x + iy$ рассмотрим установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости, ограниченное границами катода $AEDC$ и анода ABC. Для обеспечения безотрывного течения в межэлектродном промежутке в модели задачи считается, что величина скорости на границе ED постоянна и равна V_0 [3]. Скорость течения на входе в межэлектродный канал в окрестности бесконечно удалённой точки A равна V_1. Требуется определить формы границ AB и ED.

Для решения задачи введём вспомогательную параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области $G_t\left(0 < \xi < \pi/2,\ 0 < \delta < \pi|\tau|/4\right)$ $\left(\tau = i|\tau|\right)$ (рис. 2).

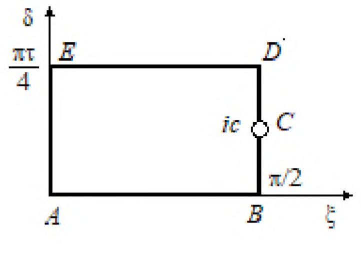

Рис. 2. Плоскость параметрической переменной *t*

Решение задачи сводится к определению аналитических функций [3]: комплексного потенциала течения $W_g(t) = \varphi_g + i\,\psi_g$ (φ_g - потенциал скорости, ψ_g - функция тока) и функции Жуковского

$$\chi(t) = \ln\frac{V_0 dz}{dW_g} = r + i\theta_g\,,\quad r = \ln\frac{V_0}{V}\,. \qquad (8)$$

где V – модуль скорости, θ_g – угол скорости с осью абсцисс x. Геометрические характеристики течения можно найти с помощью параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\exp(\chi(t))}{V_0}\frac{dW_g}{dt}. \tag{9}$$

Комплексный потенциал $W_g(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\psi_g(\xi)=0,\ \psi_g(\xi+\pi\tau/4)=Q,\quad \xi\in[0,\pi/2],$$

$$\psi_g(i\delta)=\psi_g(\pi/2+i\delta)=Q,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right],$$

где $Q=V_1h$ - расход жидкости в потоке. В плоскости изменения комплексного потенциала W_g области течения соответствует полоса ширины Q (рис. 3).

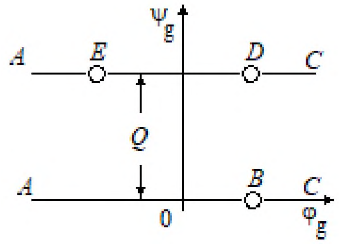

Рис. 3. Плоскость комплексного потенциала W_g

Функция dW_g/dt на горизонтальных сторонах прямоугольника G_t принимает действительные значения, а на вертикальных – мнимые; имеет нули первого порядка в точках $B(t=\pi/2)$, $E(t=\pi\tau/4)$, $D(t=\pi/2+\pi\tau/4)$ и полюса первого порядка в точках $A(t=0)$, $C(t=\pi/2+ic)$. Согласно принципу симметрии Шварца [10], функцию dW_g/dt можно аналитически продолжить через границы области G_t на всю плоскость. Продолженная таким образом функция будет двоякопериодической с периодами π, $\pi\tau$ и известными особенностями в прямоугольнике периодов [9]. Используя метод особых точек Чаплыгина [3, 11], найдём выражение производной комплексного потенциала

$$\frac{dW_g}{dt}=N\frac{\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)}{\vartheta_1(t)\vartheta_4(t)}F_1(t), \tag{10}$$

$$F_1(t)=\frac{\vartheta_1(t+\tau_1)\vartheta_1(t-\tau_1)\vartheta_2(t+\tau_1)\vartheta_2(t-\tau_1)}{\vartheta_2(t+ic)\vartheta_2(t-ic)\vartheta_3(t+ic)\vartheta_3(t-ic)},\ \tau_1=\frac{\pi\tau}{4}.$$

где $\vartheta_i(t), i=1,2,3,4$ - тета-функции для периодов π и $\pi\tau$ [9]. В работе используются обозначения $\vartheta_i=\vartheta_i(0), i=1,2,3,4$.

Интегрированием выражения (10) по четверти дуги окружности бесконечно малого радиуса с центом в точке $A(t=0)$, найдём

$$N=Q\frac{2\vartheta_4^2}{\pi F_1(0)},\ F_1(0)=-\frac{\vartheta_1^2(\tau_1)\vartheta_2^2(\tau_1)}{\vartheta_2^2(ic)\vartheta_3^2(ic)}.$$

Функция $\chi(t)$ согласно схеме течения удовлетворяет граничным условиям

$$\operatorname{Im}\chi(i\delta)=0,\ \operatorname{Im}\chi(\pi/2+i\delta)=\pi/2,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right];$$

$$\operatorname{Re}\chi(\xi+\pi\tau/4)=0,\ \xi\in[0,\pi/2].$$

Введём функцию комплексной скорости $dW_g/dz=V\exp(-i\theta_g)$ [3], и рассмотрим соотношение

$$V=\left|\frac{dW_g}{dz}\right|=\left|\frac{dW_g}{dW}\frac{dW}{dz}\right|. \tag{11}$$

Учитывая, что граница AB является одновременно линией тока идеальной жидкости и эквипотенциальной линией электрического поля и то, что на этом участке анодной границы выполняется равенство

$$\theta_g(x,y)=\theta(x,y)$$

из условия (6) и формулы (11) получается

$$\left|\frac{dW_g}{dz}\right|=a\left(b+\cos\theta_g(\xi)\right)\left|\frac{d\varphi_g}{d\varphi}\right|.$$

Отсюда следует, что на границе AB граничные значения гармонически сопряжённых функций $r(\xi)$ и $\theta_g(\xi)$ связаны соотношением

$$e^{-r}=\frac{a\left(b+\cos\theta_g\right)}{V_0}\left|\frac{d\varphi_g}{d\varphi}\right|. \tag{12}$$

Для реализации условия (12), необходимо установить соответствие между функциями $W(t)$ и $W_g(t)$.

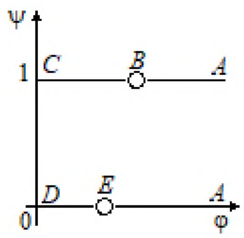

Рис. 4. Плоскость комплексного потенциала W

Согласно условиям (4), (5), комплексный потенциал $W(t)$ электрического поля удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(\xi)=1,\ \psi(\xi+\pi\tau/4)=0,\ \xi\in[0,\pi/2],$$

$$\psi(\pi/2+i\delta)=1,\ \delta\in[0,c],\ \psi(i\delta)=0,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right],$$

$$\varphi(\pi/2+i\delta)=0,\ \delta\in\left[c,\pi|\tau|/4\right]$$

Область изменения комплексного потенциала электрического поля представлена на рис. 4.

Связь между переменной t и комплексным потенциалом W определяется методом конформных отображений [10] с помощью вспомогательной переменной u, изменяющейся в верхней полуплоскости G_u (рис. 5).

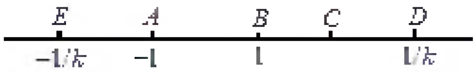

Рис. 5. Вспомогательная область

Отобразим область G_t на верхнюю полуплоскость G_u с помощью преобразований [9]

$$t_1=2K\left(\frac{2t}{\pi}-\frac{1}{2}\right),\ K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2$$

$$u=\operatorname{sn}(t_1,k)=-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(2t)}{\vartheta_3(2t)},\ k=\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2.$$

Используя интеграл Кристоффеля – Шварца [10] найдём производную функции, отображающей область G_u на область изменения комплексного потенциала

$$\frac{dW}{du}=\frac{N_1}{(u+1)\sqrt{(1-uk)(u-\gamma)}},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(2ci)}{\vartheta_3(2ci)}.$$

Для определения производной dW/dt выполним следующие преобразования

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dW}{du}\frac{du}{dt},$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dt_1}\frac{dt_1}{dt}=\frac{4K}{\pi}\operatorname{cn}(t_1,k)\operatorname{dn}(t_1,k),$$

где

$$\operatorname{cn}(t_1,k)=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2\left(t_1/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_4\left(t_1/\vartheta_3^2\right)}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_3(2t)},$$

$$\operatorname{dn}(t_1,k)=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3\left(t_1/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_4\left(t_1/\vartheta_3^2\right)}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_4(2t)}{\vartheta_3(2t)}$$

эллиптические функции Якоби [9].

Тогда

$$\frac{du}{dt}=\frac{4K}{\pi}\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\frac{\vartheta_1(2t)\vartheta_4(2t)}{\vartheta_3^2(2t)},$$

$$\frac{dW}{dt}=M\frac{\left(\vartheta_3(2t)\vartheta_2+\vartheta_2(2t)\vartheta_3\right)F_2(t)}{\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)\vartheta_4(t)},M=-\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^2}{\pi F_2(0)},$$

$$F_2(t)=\left(\frac{\vartheta_3(2t)\vartheta_3-\vartheta_2(2t)\vartheta_2}{\vartheta_3(2t)\vartheta_2(2ci)+\vartheta_2(2t)\vartheta_3(2ci)}\right)^{0,5}. \quad (13)$$

Используя формулы (10), (13) и равенство $Q=V_1h=V_1a^{-1}(b+1)^{-1}$, граничное условие (12) представим в виде

$$e^{-r(\xi)}=C\frac{V_1}{V_0}\left(\frac{b+\cos\theta_g(\xi)}{b+1}\right)\left|F_3(\xi)\right|, \quad (14)$$

$$F_3(\xi)=\frac{\vartheta_2^2(\xi)\vartheta_3^2(\xi)F_1(\xi)}{\left(\vartheta_3(2\xi)\vartheta_2+\vartheta_2(2\xi)\vartheta_3\right)F_2(\xi)},$$

$$C_1=\frac{2}{\vartheta_2\vartheta_3}\left|\frac{F_2(0)}{F_1(0)}\right|.$$

В точке B перехода свободной границы AB на полу бесконечную прямую BC, выполняется условие Бриллуэна-Вилла [3]. Кривизна свободной границы AB в точке B конечна и совпадает с кривизной стенки BC, т.е. в данной задаче равна нулю. Условие в точке B можно представить в виде равенства [3, 7]

$$d\theta_g/d\xi=0 \text{ при } \xi=\pi/2. \quad (15)$$

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы [3]

$$\chi(t)=\chi_0(t)+\omega(t). \quad (16)$$

где $\chi_0(t)=r_0+i\theta_0$ - функция Жуковского для течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе AB модуль скорости постоянный и равен V_*; $\omega(t)$ - функция, аналитическая в области G_t и непрерывная в $\overline{G}_t=G_t\cup\partial G$.

Граничные условия для функции $\chi_0(t)$ имеют вид

$$\operatorname{Im}\chi_0(i\delta)=0,\ \operatorname{Im}\chi_0(\pi/2+i\delta)=\pi/2,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right],$$
$$\operatorname{Re}\chi_0(\xi)=r_*,\quad \operatorname{Re}\chi_0(\xi+\pi\tau/4)=0,\quad \xi\in[0,\pi/2].$$

где $r_*=\ln(V_0/V_*)$. В плоскости изменения функции χ_0 области течения соответствует прямоугольник (рис. 6).

Конформное отображение области G_t (рис. 2) на область изменения функции χ_0 (рис. 6) задаётся формулой

$$\chi_0(t)=it+r_*,\ r_*=\pi|\tau|/4. \quad (17)$$

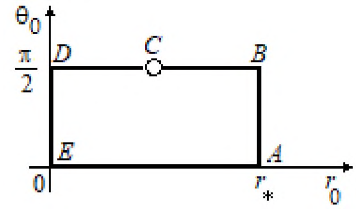

Рис. 6. Плоскость χ_0

Из сравнения граничных условий функций $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ для функции $\omega(t)$ получим нелинейную краевую задачу

$$\operatorname{Im}\omega(i\delta)=0,\ \operatorname{Im}\omega\left(\frac{\pi}{2}+i\delta\right)=0,\ \delta\in\left[0,\frac{\pi|\tau|}{4}\right], \tag{18}$$

$$\operatorname{Re}\omega(\xi+\pi\tau/4)=0,\quad \xi\in[0,\pi/2], \tag{19}$$

$$e^{-\nu-r_*}=C_1\frac{V_1}{V_0}\left(\frac{b+\cos(T+\mu)}{b+1}\right)|F_3(\xi)|, \tag{20}$$

$$T=\theta_0(\xi),\ \mu=\operatorname{Im}\omega(\xi),\ \nu=\operatorname{Re}\omega(\xi),\ \xi\in[0,\pi/2].$$

Таким образом, задача свелась к определению функции $\omega(t)$, удовлетворяющей граничным условиям (18) - (20).

Для практической реализации предложенного метода неизвестную функцию $\omega(t)$ разложим в ряд [11]. С помощью функции

$$p=\exp(\tau_1+2ti),\ \tau_1=\pi|\tau|/2$$

отобразим область G_t на полукольцо $G_p\left(1<|p|<\exp(\tau_1),\operatorname{Im}p>0\right)$ (рис. 7) в плоскости комплексной переменной $p=p_1+ip_2$.

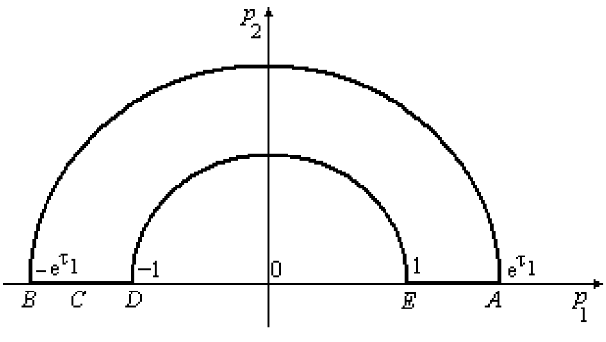

Рис. 7.

Из условий (18) следует, что

$$\operatorname{Im}\omega(p)=0,\ p=p_1\in[-\exp(\tau_1),-1]\cup[1,\exp(\tau_1)].$$

Функцию $\omega(p)$ можно аналитически продолжить на все кольцо $1\le|p|\le\exp(\tau_1)$ и представить её в виде ряда Лорана [10] с вещественными коэффициентами

$$\omega(p)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kp^k,\ \omega(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp(\tau_1+2ti)k.$$

Из условия (19) следует (всюду далее суммирование ведётся от $k=1$ до $k=\infty$)

$$\operatorname{Re}\omega(\xi+\pi\tau/4)=c_0+\sum(c_{-k}+c_k)\cos2\xi k=0,$$

$$c_0=0,\quad c_{-k}=-c_k.$$

Окончательно, для функции $\omega(t)$ получим следующее представление

$$\omega(t)=2\sum c_k\operatorname{sh}(\tau_1+2ti)k. \tag{21}$$

Условие (20) с учётом формулы (17) и разложения (21) имеет вид

$$C_1\frac{V_1}{V_0}\left(\frac{b+\cos(\xi+2s_1(\xi))}{(b+1)\exp(-(2s_2(\xi)+r_*))}\right)|F_3(\xi)|=1, \tag{22}$$

$$s_1(\xi)=\sum c_k\operatorname{ch}(\tau_1k)\sin(2\xi k),$$

$$s_2(\xi)=-\sum c_k\operatorname{sh}(\tau_1k)\cos(2\xi k).$$

Отсюда при $\xi=0$ получается

$$V_1/V_0=\exp(-(2s_2(0)+r_*)). \tag{23}$$

Подставив выражение (23) в формулу (22), получим

$$C_1\left(\frac{b+\cos(\xi+2s_1(\xi))}{(b+1)\exp(-(2(s_2(\xi)-s_2(0))))}\right)|F_3(\xi)|=1. \tag{24}$$

Условие (15) с учётом формул (16), (17) и (21) представим в виде

$$1+4\sum_{k=1}^{\infty}c_kk(-1)^k\operatorname{ch}(\tau_1k)=0. \tag{25}$$

Используя формулы (9), (10), (16), (17) найдём параметрическую зависимость

$$\frac{dz}{dt}=P\frac{V_1}{V_0}\frac{\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)}{\vartheta_1(t)\vartheta_4(t)}F_1(t)\exp(it+\omega(t)), \tag{26}$$

$$P=\frac{2\vartheta_4^2h}{\pi}\exp\left(\frac{\pi|\tau|}{4}\right)$$

Интегрированием выражения (26) по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $C(t=\pi/2+ic)$, найдём величину межэлектродного расстояние h_2 между линиями BC и CD

$$h_2=\frac{V_1}{V_0}\frac{2h}{\vartheta_2\vartheta_3}\exp\left(\frac{\pi|\tau|}{4}-c\right)\cdot R\cdot T\cdot K, \tag{27}$$

$$R=\frac{\vartheta_1(ic)\vartheta_4(ic)}{\vartheta_2(ic)\vartheta_3(ic)\vartheta_1(2ci)}, \tag{28}$$

$$T=\frac{\vartheta_1(ic+\tau_1)\vartheta_1(ic-\tau_1)\vartheta_2(ic+\tau_1)\vartheta_2(ic-\tau_1)}{\vartheta_4(2ci)},$$

$$K=\exp\left(2\sum c_k(-1)^k sh\left(\frac{\pi|\tau|}{2}-2c\right)k\right).$$

Используя формулу удвоения [9]

$$\vartheta_1(2y)\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4=2\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)$$

выражение (28) представим в виде

$$R=\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2\vartheta_2^2(ic)\vartheta_3^2(ic)}. \qquad (29)$$

Подставляя формулу (29) в соотношение (27), получим

$$\frac{h_2}{h}=\frac{V_1}{V_0}\exp\left(\frac{\pi|\tau|}{4}-c\right)\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2^2(ic)\vartheta_3^2(ic)}\cdot T\cdot K.$$

Используя условие постоянства расхода в потоке, найдём

$$\frac{V_2}{V_0}=\frac{\vartheta_2^2(ic)\vartheta_3^2(ic)}{\vartheta_4\cdot T\cdot R}\exp\left(c-\frac{\pi|\tau|}{4}\right),$$

где V_2 - значение скорости течения на выходе из межэлектродного канала в окрестности бесконечно удалённой точки C.

Для численного решения задачи задаются физические параметры a_0, a_1, j_0 и математический параметр c.

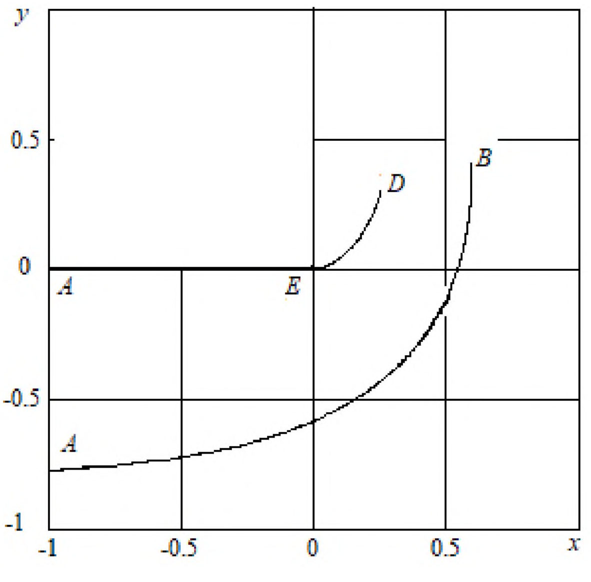

Рис. 8. Результаты расчёта

Коэффициенты разложений (21) определяются таким образом, чтобы на искомой анодной границе удовлетворялось условие (22). Система уравнений для вычисления коэффициентов разложения (21) решается методом Ньютона совместно с уравнением (25), предназначенным для определения $|\tau|$.

Результаты расчёта анодной границы и границы спрофилированного участка катода для частного случая представлены на рис. 8.

Список используемых источников

1. Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А.Д. Давыдов, Е. Козак. - М.: Наука, 1990. - 272с.
2. Основы теории и практики электрохимической обработки металлов и сплавов / М.В. Щербак, М.А. Толстая, А.П. Анисимов, В.Х. Постаногов. – М.: Машиностроение, 1981. – 263с.
3. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. -. М.: Наука, 1979. - 536с.
4. Импульсная электрохимическая размерная обработка / В.П. Житников, А.Н. Зайцев. – М.: Машиностроение, 2008. – 413с.
5. Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ / Л.М. Котляр, Н.М. Миназетдинов. – М.: Academia, 2005. – 200с.
6. Minazetdinov N. M. Cavitation flow of an ideal incompressible fluid in the electrochemical machining of metals // Journal of applied mathematics and mechanics. 2017. Т. 81. № 1. P. 29-35.
7. Minazetdinov N. M. One problem of the theory of dimensional electrochemical machining of metals // Journal of applied mechanics and technical physics. 2009. Vol. 50. № 3. P. 540-545.
8. Электрохимическое формообразование / В.В. Клоков. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. -80с.
9. Курс современного анализа Т.2. Трансцендентные функции / Э.Т. Уитекер, Дж. Н. М Ватсон: - Физматгиз, 1963. - 515 с.
10. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев., Б.В. Шабат.- М.: Наука, 1987. - 688 с.
11. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжёлой жидкости / О.М. Киселёв, Л.М. Котляр. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. -156с.